बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन 100

2026

(कक्षा 10)

गणित

विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

पढ़ेगा राजस्थान बढ़ेगा राजस्थान

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

संयोजक कार्यालय – संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन - 100 मार्गदर्शक

संगीता मानवी
संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू संभाग, चूरू

महेन्द्र सिंह बड़सरा
संभागीय कॉर्डिनेटर, शेखावाटी मिशन 100
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

संकलनकर्ता टीम : गणित

रामावतार भदाला
तकनीकी सहयोगी शेखावाटी मिशन - 100

राकेश कुमार
रा. उ. मा. वि., टोडी माधोपुरा, (सीकर)

भाना राम
रा. उ.मा. वि. सावलोदा पुरोहितान, (सीकर)

राकेश कुमार पूनियां
रा.उ.मा.वि. रोसावां, (सीकर)

रवि शंकर गौड़
जिला शिक्षा एवं प्रशिक्षण संस्थान (डाइट) सीकर

हेमराज सैनी
रा.उ.मा.वि., सुजावास, (सीकर)

संजय शर्मा
रा.उ.मा.वि. बराल, (सीकर)

मुकेश पारीक
रा.उ.मा.वि. नांगल नाथूसर, (सीकर)

नरेश कुमार
MGSS बलारां, (सीकर)

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

कक्षा -10 | विषय :- गणित | समयः- 3.15 घण्टे | पूर्णांक- 80

क्र. सं.	उद्देश्य इकाई / उप इकाई	ज्ञान						अवबोध						ज्ञानोपयोग						कौशल						विश्लेषण						योग
		बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1	वास्तविक संख्याएँ	2(2)								2(2)																						4(4)
2	बहुपद			1(1)													2(1)									1(1)						4(3)
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म																2(1)									1(1)		1(1)				4(3)
4	द्विघात समीकरण								1(1)									3(1)														4(2)
5	समांतर श्रेढ़ीया	1(1)						1(1)	1(1)	1(1)							2(1)															6(5)
6	त्रिभुज	1(1)	1(1)								2(1)																					4(3)
7	निर्देशांक ज्यामिति							1(1)			2(1)	3(1)				1(1)																7(4)
8	त्रिकोणमिति का परिचय		1(1)					1(1)		1(1)							1(1)	3(1)					1(-)									8(5)
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग							1(1)											3(1)						1(-)							5(2)
10	वृत्त	1(1)	1(1)	1(1)				1(1)															2(1)									6(5)
11	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	1(1)								2(2)							2(1)															5(4)
12	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	1(1)												1(1)					3(1)						1(-)							6(3)
13	सांख्यिकी	1(1)						1(1)		2(2)									2(1)				1(1)	1(1)	1(-)				1(-)	2(-)	1(-)	13(7)
14	प्रायिकता	1(1)			2(1)				1(1)																							4(3)
	योग	9(9)	3(3)	2(2)	2(1)			6(6)	3(3)	8(8)	4(2)	3(1)		1(1)		1(1)	9(5)	6(2)	8(3)				4(1)	1(1)	3(-)		1(1)	1(1)	3(-)	2(2)		
	सर्वयोग	16						24						25						8						7						80(53)

प्रश्न–पत्र की योजना – 2026

कक्षा – 10
विषय – गणित
अवधि – 3.15 घण्टे पूर्णांक – 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार–

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	16	20.00
2.	अवबोध	24	30.00
3.	ज्ञानोपयोग	25	31.25
4.	कौशल	8	10.00
5.	विश्लेषण	7	8.75
	योग	80	100 %

2. प्रश्नों के प्रकार अनुसार अंकभार–

क्र.सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक	प्रतिशत (अंकों का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	बहुविकल्पात्मक	18	1	18	22.50	33.96	36
2.	रिक्त स्थान	6	1	06	7.50	11.32	15
3.	अतिलघूत्तरात्मक	12	1	12	15.00	22.64	42
4.	लघूत्तरात्मक	10	2	20	25.00	18.87	40
5.	दीर्घउत्तरीय प्रश्न	04	3	12	15.00	7.55	32
6.	निबंधात्मक	03	4	12	15.00	5.66	30
	योग	**53**		**80**	**100**	**100**	**195 मिनट**

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' में हैं

3. विषय वस्तु का अंकभार–

क्र. स.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	वास्तविक संख्याएँ	4	5.00
2	बहुपद	4	5.00
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	4	5.00
4	द्विघात समीकरण	4	5.00
5	समांतर श्रेढियां	6	7.50
6	त्रिभुज	4	5.00
7	निर्देशांक ज्यामिति	7	8.75
8	त्रिकोणमिति का परिचय	8	10.00
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	5	6.25
10	वृत्त	6	06.25
11	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	5	7.50
12	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	05.00
13	सांख्यिकी	13	16.25
14	प्रायिकता	4	5.00
	योग	80	100

BSER

1 वास्तविक संख्याएँ

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (2), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 2, अंक (2) कुल अंक = 4

❖ **परिमेय संख्याएँ :- ऐसी संख्याएं जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके। जहाँ p,q पूर्णांक संख्या है तथा $q \neq 0$ परिमेय संख्याएँ कहलाती है।**

उदा.- $\frac{22}{7}$,$\sqrt{225}$, $\frac{4\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$, $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$, 0 , $\frac{1}{-3}$, $\frac{-2}{-3}$ आदि

❖ **अपरिमेय संख्याएँ :- ऐसी संख्याएं जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सके। अपरिमेय संख्याएँ कहलाती है।**

उदा. $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,\frac{1}{\sqrt{2}},2-\sqrt{5},2.23606........,2+\sqrt{2}$ आदि

❖ **वास्तविक संख्याएँ :- सभी परिमेय संख्या और अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से लिखने पर वास्तविक संख्या प्राप्त होती है।**

उदा. - $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,\frac{22}{7},\frac{1}{2},\frac{-3}{2}$ आदि

महत्वपूर्ण तथ्य:-

1. एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है।

2. एक अशुन्य - परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल तथा भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

3. यदि दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाये, भाग दे या गुणा करने पर परिमेय या अपरिमेय संख्या दोनों में से कुछ भी आ सकता है।

❖ **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय:- प्रत्येक भाज्य संख्या का अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड, अभाज्य गुणनखण्डों के आने के क्रम के बिना अद्वितीय होते है।**

महत्वपूर्ण:- संख्या 1 न तो अभाज्य है तथा न ही भाज्य।

◈ **बहुविकल्प प्रश्न :-**

1. **निम्नलिखित में से कौनसी अपरिमेय संख्या नहीं है-**
   (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{24}$
   (3) $\sqrt{35}$ (4) $\sqrt{121}$ (4)

2. **$2-\sqrt{3}$ है-**
   (1) परिमेय संख्या (2) अपरिमेय संख्या
   (3) सम संख्या (4) पूर्णांक संख्या (2)

3. **π एक है -**
   (1) परिमेय संख्या (2) अपरिमेय संख्या
   (3) वास्तविक संख्या (4) 2 व 3 दोनों (4)

4. **दो संख्याओं का म.स. 15 व ल.स. 105 है। यदि उनमें से एक 5 है। तो दूसरी संख्या क्या होगी -**
   (1) 75 (2) 15
   (3) 315 (4) 525 (3)

5. **निम्न में से अपरिमेय संख्या है-**
   (1) 2 (2) 2.232425......
   (3) $2.\overline{23}$ (4) $\frac{22}{7}$ (2)

6. **144 के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 की घात है-**
   (1) 4 (2) 5
   (3) 6 (4) 3 (1)

7. **यदि P^2 एक सम संख्या है तो P एक:-**
   (1) विषम संख्या है (2) सम संख्या है
   (3) कह नहीं सकते (4) इनमें से कोई नहीं (2)

8. **यदि संख्या a तथा 18 का LCM = 36 तथा a और 18 का HCF= 2 है तो a का मान होगा -**
   (1) 1 (2) 2
   (3) 5 (4) 4 (4)

9. संख्याओं 96 और 404 का म.स. होगा -

(1) 16 (2) 12

(3) 8 (4) 4 (4)

10. यदि दो परिमेय संख्याओं के लिए HCF = LCM हो तो संख्याऐं होगी।

(1) भाज्य (2) समान

(3) अभाज्य (4) सहअभाज्य (2)

11. 144 व 198 का महत्तम समावर्त्य (HCF) क्या होगा-

(1) 18 (2) 24

(3) 36 (4) 72 (1)

12. 156 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में क्या लिखेंगे।

(1) $2^2\times3^2\times13^2$ (2) $2^2\times3^1\times13^1$

(3) $2^1\times3^1\times13^1$ (4) $2^1\times3^2\times5^1$ (2)

13. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ होती है।

(1) एक (2) दो

(3) शून्य (4) अनन्त (4)

14. दो संख्याओं a व b का HCF क्या होगा-

(1) शून्य (2) दो

(3) एक (4) अनन्त (3)

◈ अतिलघुत्तरात्मक/लघुत्तरात्मक प्रश्न :-

15. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है-

हल : माना $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\therefore 3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}, \quad b\neq 0 \quad ....(1)$$

जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्याएँ है

समीकरण (1) से

$$2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3$$

$$\text{या } \sqrt{5}=\frac{a-3b}{2b} \quad ......(2)$$

चूँकि a, b पूर्णांक संख्याएँ है अतः $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या प्राप्त होगी। अतः समीकरण (2) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है जबकि हम जानते है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है अतः यह परिणाम विरोधाभाषी है अतः हमारी परिकल्पना कि $3+2\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है जो कि गलत है।

इससे सिद्ध होता है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

16. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है।

हल : हम जानते है कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक जो शून्य पर समाप्त होता है वह अंक 5 से भाज्य होता है अर्थात उस धनात्मक पूर्णांक का एक गुणनखण्ड 5 होना चाहिए। यहाँ किसी n के लिए संख्या 6^n धनात्मक पूर्णांक है जो शून्य पर समाप्त होता है। अतः गुणनखण्ड करने पर

$$6^n = (2\times3)^n = 2^n\times3^n$$

इस प्रकार 6^n के गुणनखण्ड में 2 एवं 3 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है अर्थात गुणनखण्ड में अंक 5 नहीं है। अतः 6^n किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 0 अंक पर समाप्त नहीं होगा।

17. अभाज्य गणुनखण्ड विधि द्वारा 510 और 92 का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समावर्तक ज्ञात किजिए।

हल. $510 = 2\times3\times5\times17$

$92 = 2\times2\times23$

HCF (510, 92) $= 2^1$

$= 2$

LCM (510, 92) $= 2\times2\times3\times5\times17\times23$

$=2^2\times3\times5\times17\times23$

$=23460$

18. दो संख्याओं 90 व 144 का LCM = 720 होतो HCF ज्ञात करों।

हल. दो संख्याओं के LCM व HCF में निम्न सम्बन्ध होता है-

दो संख्याओं का गुणनफल= LCM × HCF

$90 \times 144 = 720 \times HCF$

$$HCF = \frac{90 \times 144}{720}$$

HCF = 13

19. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ (जहाँ a, b सहअभाज्य पूर्णांक है)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$3b^2 = a^2$$

अत: 3, a^2 को विभाजित करेगा।

इसलिए 3,a को विभाजित करेगा।

माना a = 3c, जहाँ c एक पूर्णांक है

$3b^2 = (3c)^2$

$3b^2 = 9c^2$

$b^2 = 3c^2$

अत: 3, b^2 को विभाजित करेगा

इसलिए 3, b को विभाजित करेगा।

अत: a व b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 3 है।

परन्तु यह इस तथ्य का विरोध करता है कि a और b सह अभाज्य पूर्णांक है।

अत: हमारी परिकल्पना गलत है।

अत: $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

20. सिद्ध कीजिए कि 5-$\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है

हल. माना कि 5-$\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अत: इसे $\frac{P}{Q}$ इस में लिख सकते हैं।

$$5 - \sqrt{3} = \frac{P}{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 5 - \frac{P}{Q}$$

$\because$ P, Q, 5 सभी पूर्णांक है।

$\therefore$ 5-$\frac{P}{Q}$ एक परिमेय संख्या है।

तो $\sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो इसका विरोध करता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए हमारी परिकल्पना गलत है।

अत: $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

21. सिद्ध कीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अत: $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (जहाँ a तथा b सहअभाज्य पूर्णांक है b $\neq 0$)

$$\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

$\therefore \frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो कि इस तथ्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह विरोधाभास हमारी गलत परिकल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।

अत: $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. दो संख्याओं 306 और 657 का HCF = 9 हो तो LCM ज्ञात करों -

हल: दो संख्याओं कें LCM व HCF में निम्न सम्बन्ध होता है -

दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

306 × 657 = 9 × LCM

$$LCM = \frac{306 \times 657}{9}$$

$LCM = 22338$

23. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 6, 72 और 120 का LCM व HCF ज्ञात करें।

हल: $6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

$LCM\ (6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

$= 8 \times 9 \times 5$

$= 360$

$HCF\ (6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1$

$= 2 \times 3$

$= 6$

❖❖❖

2 बहुपद

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (1) कुल अंक = 4
लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2)

❖ **बहुपद :- ऐसा बीजीय व्यंजक जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक पूर्ण संख्या हो। बहुपद कहलाता है तथा चर राशि की उच्चतम घात ही बहुपद की घात होती है।**

उदा. $4x+5$, $3x^2+x+4$, $2-x^2$, $4x^0$, $\sqrt{3}a+\sqrt{7}$, $\sqrt{5}t^2$, $3x^3-2x^2+x-1$ आदि

❖ **रैखिक बहुपद:- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक हो। रैखिक बहुपद कहलाता है।**

❖ **x चर राशि के रैखिक बहुपद को $p(x)=ax+b$ जहाँ a, b वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$**

उदा. $P(x)=4x+5$, $P(x)=5x$, $P(x)=2x+3$, $P(x)=\sqrt{3}x+5$

❖ **द्विघात बहुपद :- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात 2 हो। द्विघात बहुपद कहलाता है।**

❖ x चर राशि में द्विघात बहुपद को $p(x)=ax^2+bx+c$ से लिखते है, जहाँ a, b, c तीन वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$

उदा. $p(x)=x^2+2x+1$, $p(x)=x^2-4$, $p(x)=5x^2$, $p(x)=\sqrt{3}x+2-x^2$

❖ **बहुपद के शुन्यक :- एक वास्तविक संख्या K बहुपद p(x) का शुन्यक कहलाती है। यदि p(k)=0**
अर्थात् बहुपद में उपस्थित चर राशि का वह मान जिसको बहुपद में रखने पर 0 प्राप्त हो। चर राशि का वह मान बहुपद का शुन्यक कहलाता है।

❖ **जितनी बहुपद की घात होगी। उतने ही बहुपद के शुन्यक होगें।**

❖ **बहुपद के शुन्यकों व गुणांको में सम्बन्ध:-**

1. रैखिक बहुपद $p(x) = ax+b$ का शुन्यक $= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचरपद})}{x \text{ का गुणांक}}$

2. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के दो शुन्यक माना कि α और β है तो

शुन्यकों का योग $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शुन्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

❖ **महत्वपूर्ण तथ्य:-**

❖ **जब शुन्यकों का योग और शुन्यकों का गुणनफल दिया हुआ हो तो द्विघात बहुपद ज्ञात करने का सूत्र**
x^2- (शुन्यकों का योग)x+ शुन्यकों का गुणनफल

◈ **बहुविकल्प प्रश्न :-**

1. **निम्न में से बहुपद है -**
(1) $\sqrt{3}x^2+4$ (2) $3\sqrt{x}+1$
(3) $y+\frac{2}{y}$ (4) $3\sqrt{t}+t\sqrt{2}$ (1)

2. **निम्न में से रैखिक बहुपद है -**
(1) $4x^2-3$ (2) $4x-1$
(3) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (4) 5 (2)

3. **निम्न में से द्विघात बहुपद है-**
(1) $3x+4$ (2) 4
(3) $x+\frac{1}{x^2}$ (4) $2x^2-3x+1$ (4)

4. **बहुपद $p(x)=4x^2+7x-5x^3$ की घात है -**
(1) 4 (2) 0
(3) 3 (4) 2 (3)

5. **बहुपद $p(t)=t^2-15$ के शुन्यक होंगे -**
(1) 15, 15 (2) -15, 15
(3) $\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (4) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (4)

6. **बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ में शुन्यकों का गुणफल होगा?**
(1) $\frac{-b}{a}$ (2) 1
(3) $\frac{-b}{c}$ (4) $\frac{c}{a}$ (4)

7. बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ में शुन्यकों का योग होगा?

(1) $\frac{-b}{a}$ (2) 1

(3) $\frac{-b}{c}$ (4) $\frac{c}{a}$ (1)

8. यदि बहुपद $p(x)=x^2-2x+5$ के शुन्यक a, b है तो ab का मान क्या होगा?

(1) -2 (2) 5

(3) 3 (4) -5 (2)

9. यदि बहुपद $2x^2+x+k$ का शुन्यक 3 है तो k का मान होगा–

(1) 12 (2) 21

(3) 24 (4) -21 (4)

10. यदि किसी बहुपद के शुन्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ है तो बहुपद के गुणनखण्ड क्रमशः होगें:-

(1) $(x-2), (x-2)$ (2) $(x+\sqrt{2})$ $(x+2)$

(3) $(x-\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$

(4) $(x+\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$ (3)

11. बहुपद के शुन्यकों का योगफल तथा गुणनफल क्रमशः0 और $\sqrt{5}$ हो तो बहुपद होगा -

(1) x^2-x+5 (2) $x^2-\sqrt{5}$

(3) $x^2+\sqrt{5}$ (4) $x^2-2x+\sqrt{5}$ (3)

12. एक द्विघात बहुपद के शून्यकों की अधिकतम संख्या क्या होती है?

(1) 0 (2) 3

(3) 1 (4) 2 (4)

◈ अतिलघुत्तरात्मक/लघुत्तरात्मक प्रश्न -

13. बहुपद $p(x)=x^2-2x-8$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए।

हल. $\Rightarrow x^2-2x-8=0$

$\Rightarrow x^2-4x+2x-8=0$

$\Rightarrow x(x-4)+2(x-4)=0$

$\Rightarrow (x-4)(x+2)=0$

$\Rightarrow x-4=0, x+2=0$

$\Rightarrow x=4, x=-2$

बहुपद के शुन्यक 4, -2 होगें।

14. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 है।

हल. माना कि द्विघात बहुपद के शुन्यक α, β है

$\alpha+\beta=-3$

$\alpha\beta=2$

द्विघात बहुपद = $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$= x^2+3x+2$

15. द्विघात बहुपद $p(x)=6x^2-3-7x$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए व शुन्यको व गुणाको में सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल. $p(x)=6x^2-3-7x$

$p(x)=6x^2-7x-3$

$p(x)=6x^2+(-7)x+(-3)$.............(1)

बहुपद का शुन्यक समीकरण - $P(x) = 0$

$6x^2-7x-3 = 0$

$6x^2-9x+2x-3 = 0$

$3x(2x-3)+1(2x-3) = 0$

$(2x-3)(3x+1) = 0$

यहाँ $2x-3=0, 3x+1=0$

$2x=3, 3x = -1$

$x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{-1}{3}$

अतः शुन्यक $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$ होगें।

शुन्यक का योग $=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$

शुन्यकों का गुणनफल $=\frac{3}{2}\times\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{-1}{2}$

व्यापक द्विघात बहुपद से तुलना करने पर

a = 6, b = -7, c = - 3

शुन्यकों व गुणांकों में सम्बन्ध -

शुन्यकों का योग = $\frac{-b}{a}=\frac{-(-7)}{6}=\frac{7}{6}$

शुन्यकों का गुणनफल = $\frac{c}{a}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$

अतः शुन्यकों और गुणांकों के मध्य संबंध सत्य है।

16. यदि द्विघात व्यंजक $Kx^2+5x+3k$ के शुन्यकों का योग, उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का माना ज्ञात

कीजिए।

हल. द्विघात व्यंजक $kx^2+5x+3k$ की तुलना द्विघात व्यंजक ax^2+bx+c से करने पर -

$a = k$, $b = 5$, $c = 3k$

शुन्यकों का योग $= \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{k}$

शुन्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{3k}{k} = 3$

प्रश्नानुसार, शुन्यकों का योग = शुन्यकों का गुणनफल

$\frac{-5}{k} = 3$

$k = \frac{-5}{3}$

17. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिनके शुन्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं :- $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$

हल. माना कि बहुपद ax^2+bx+c है तथा इसके शुन्यक α और β है।

तब $\alpha + \beta = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$

तथा $\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

यदि $a = 4$, $b = 1$, $c = 1$ हो तो

द्विघात बहुपद $4x^2+x+1$ होगा।

18. $p(x)=x^2-3x-4$ का $x=-1$ पर मान ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$

$x=-1$ रखने पर

$p(-1)=(-1)^2-3(-1)-4$

$p(-1)=1+3-4$

$p(-1)=4-4$

$p(-1)=0$

19. रैखिक बहुपद $p(x)=3x-4$ के शुन्यक ज्ञात करो।

उ. माना कि $p(x)$ बहुपद का शुन्यक k है तो

$p(k)=0$

अतः $3x-4=0$

$3x=4$

$x=\frac{4}{3}$

अतः $x = \frac{4}{3}$ बहुपद का शुन्यक होगा।

❖❖❖

@SHEKHAWATIMISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

3 दो चर वाले रैखिक समीकरण - युग्म

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (1), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2) कुल अंक = 4

❖ रैखिक समीकरण - ऐसा समीकरण जिसमें उपस्थित चर की घात एक हो, रैखिक समीकरण कहलाता है।

❖ दो चर वाला रैख्कि समीकरण - जब समीकरण में दो चर उपस्थित हो और दोनों की घात एक-एक हो।

❖ दो चर वाले रैखिक समीकरण का युग्म का व्यापक रूप-

$a_1x+b_1y+c_1=0$ जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$-वास्तविक संख्याएँ है।

$a_2x+b_2y+c_2=0$ x,y - चर है।

❖ दो चर वाले रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है। अत: समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएँ एक समतल पर प्राप्त होगी। जिनकी स्थितियाँ -

क्र.म.	अनुपातों की तुलना	ग्राफीक निरूपण	बीजगणितीय निरूपण	संगत /असंगत
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय हल)	संगत
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रुप से अनेक हल	संगत
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं	असंगत

❖ रैखिक समीकरणों को हल करने की बीजगणितीय विधि-

1. **प्रतिस्थापन विधि** - इसमें एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए प्रतिस्थापित करते है।
2. **विलोपन विधि** - इसमें एक चर का विलोपन करके दूसरे चर का मान ज्ञात करते है।
3. **वज्र गुणन विधि**
4. **ग्राफीय विधि**

◈ बहुविकल्प प्रश्न :-

1. $3x+2y=11$ को संतुष्ट करने वाला युग्म है -

(1) (1, 4) (2) (2, 3)
(3) (3, 5) (4) (1, 3) (1)

2. निम्न रैखिक समीकरण युग्म के हल है -

$x + y = 14$; $x - y = 4$

(1) $x = 5, y = 9$ (2) $x = 1, y = 10$
(3) $x = 9, y = 5$ (4) $x = 4, y = 0$ (3)

3. k के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है?

$3x+y = 1; (2k-1)x+y = 2k+1$

(1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4 (2)

4. यदि समीकरण $y = mx+3$ में $x = -2$ व $y = 5$ प्रतिस्थापित करने पर m का मान होगा -

(1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) 2 (2)

5. यदि $2x+y = 6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म है -

(1) (1, 2) (2) (2, 1)
(3) (2, 2) (4) (1, 1) (3)

6. एक रैखिक समीकरण की घात होती है -

(1) 0 (2) 2

(3) 1 (4) कोई नहीं (3)

7. दो रैखिक समीकरणों के आलेख प्रतिच्छेदी रेखाएँ है, तब रैखिक समीकरण युग्म का -

(1) कोई हल नहीं (2) अद्वितीय हल है

(3) दो हल है (4) अनेक हल हैं। (2)

8. दो रैखिक समीकरणों के आलेख समान्तर रेखाएँ है तब रैखिक समीकरण युग्म का -

(1) कोई हल नहीं (2) अद्वितीय हल है

(3) दो हल है (4) अनेक हल है (1)

9. युगपत समीकरण $2x+3y = 5$, $4x+6y = 9$ निकाय है-

(1) संगत (2) असंगत

(3) अ व ब दोनों (4) इनमें से कोई नहीं (2)

10. समीकरण $x + 2y = 9$ में यदि $x = 5$ हो तो y का मान क्या होगा -

(1) 1 (2) 2

(3) 4 (4) -2 (2)

11. समीकरण $4x + 2y = K$ में यदि $x = 2, y = 1$ हो तो k का मान होगा-

(1) 6 (2) 10

(3) 7 (4) 8 (2)

12. दो अंकों वाली संख्या होगी यदि इकाई का अंक x व दहाई का अंक y हो-

(1) 10x+y (2) 10y+x

(3) दोनों (4) इनमें से कोई नहीं (2)

13. समीकरण $x + y = 6$ में कितने हल होंगे?

(1) एक (2) दो

(3) अनंत (4) एक भी नहीं (3)

14. एक संख्या का तीन गुणा और दूसरी संख्या का दोगुने का अन्तर 9 है तो इसको बीजगणितीय रूप में लिखिए-

(1) $3x + 2y = 9$ (2) $3x - 2y = 9$

(3) $2x - 3y = 9$ (4) $2x + 3y = 9$ (2)

15. 7 सेवों और 4 संतरों का मूल्य 45 रु. है। इसको बीजगणितीय रूप में लिखिए-

(1) $7x + 4y = 45$ (2) $7x - 4y = 45$

(3) $7x + 3y = 35$ (4) $4x + 7y = 45$ (1)

◈ अतिलघुतरात्मक प्रश्न

01. दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म का मानक रूप लिखिए-

हल- $ax + by + c = 0$

02. 9 पेंसिल तथा 8 पेन का मूल्य 54 रूपये है। इसको बीजगणितीय समीकरण के रूप में लिखिए।

हल $9x + 8y = 54$

03. मानक समीकरण $ax + by + c = 0$ के लिए समीकरण $2x + 3y = 4$ में a, b, c का मान ज्ञात कीजिए-

हल $a = 2, b = 3, c = -4$

04. $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$ समीकरण युग्म द्वारा निरूपति रेखाओं की प्रकृति लिखिए।

हल दिया गया रैखिक समीकरण युग्म

$2x + y - 6 = 0$ तथा $4x - 2y - 4 = 0$

$a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = -6$

$a_2 = 4$, $b_2 = -2$, $c_2 = -4$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$\because \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अत: दिये गये समीकरण युग्म का एक अद्धितीय हल/प्रतिच्छेदि होगा।

05. एक टैक्सी का किराया प्रथम किमी के लिए 25 रू तथा उसके बाद प्रति किमी 17 रू है। यदि एक व्यक्ति x किमी दूरी तय करने पर y रू किराया देता है तो इसे बीज गणितीय रूप में व्यक्ति कीजिए।

हल- $17 (x - 1) + 25 = y$

06. समीकरण $2x + 5y = 17$ के दो हल ज्ञात कीजिए।

हल $2x + 5y = 17$ $\quad x = \frac{17-5y}{2}$

जब $y = -1$ हो $\quad x = \frac{17+5}{2} = \frac{22}{2} = 11$

जब $y = 1$ तो $\quad x = \frac{17-5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

समीकरण के दो हल $(11,-1)(6,1)$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. k किस मान के लिए समीकरण निकाय $3x-2y = 0$ तथा $kx + 5y = 0$ के अन्नत हल होंगे?

हल. समीकरण निकाय के अन्नत हल होगें यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$a_1 = 3$, $b_1 = -2$, $c_1 = 0$

$a_2 = k$, $b_2 = 5$, $c_2 = 0$

$\therefore \frac{3}{k} = \frac{-2}{5}$

$-2k = 15$

$\therefore k = \frac{-15}{2}$

2. समीकरण युग्म को हल कीजिए -

$x + y = 14$, $x - y = 4$

हल. $x + y = 14$............... (1)

$x - y = 4$ .... (2)

समी. (1) व (2) को जोड़ने पर

$x + y = 14$

$x - y = 4$

$2x = 18$

$x = \frac{18}{2} = 9$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$9 + y = 14$

$y = 14 - 9 = 5$

अत: $x = 9, y = 5$

3. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए -

$s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

हल. दिये गये समीकरण युग्म

$s - t = 3$ .... (1)

तथा $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

$\frac{2s + 3t}{6} = \frac{6}{1}$

वज्र गुणा करने पर

$2s + 3t = 36$ .... (2)

समी. (1) से $s = 3 + t$ .... (3)

समी. (3) से s का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$2(3 + t) + 3t = 36$

$6 + 2t + 3t = 36$

$6 + 5t = 36$

या $5t = 36 - 6$

या $5t = 30$

$t = \frac{30}{5} = 6$

t का मान समी. (1) में रखने पर

$s - 6 = 3$

$s = 3 + 6 = 9$

$\therefore s = 9, t = 6$

4. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए -

$x + y = 5$ व $2x - 3y = 4$

हल. दिये गये समीकरण -

$x + y = 5$ .... (1)

$2x - 3y = 4$ .... (2)

समी. (1) को 2 से गुणा करने पर

$2x + 2y = 10$ .... (3)

समी. (3) में से समी. (2) को घटाने पर

$2x + 2y = 10$

$\underset{-}{2x} \underset{+}{-3y} = \underset{-}{4}$

$5y = 6$

$y = \frac{6}{5}$

y का मान समी. (1) में रखने पर -

$x + \frac{6}{5} = 5$

$x = \frac{5}{1} - \frac{6}{5}$

$x = \frac{25 - 6}{5} = \frac{19}{5}$

$\therefore x = \frac{19}{5}$ व $y = \frac{6}{5}$

5. दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हे ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो संख्याएँ x व y है।

प्रश्नानुसार $x - y = 26$ .... (1)

पुनः प्रश्नानुसार $x = 3y$ .... (2)

समी. (2) से x का मान समी. (1) में रखने पर

$3y - y = 26$

$2y = 26$

$y = \frac{26}{2}$

$\therefore y = 13$

y का मान समी. (2) में रखने पर

$x = 3 \times 13 = 39$

अतः दो संख्याएँ 39 व 13 है।

6. दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हे ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो सम्पूरक कोण x व y है तथा $x > y$

प्रश्नानुसार $x + y = 180^0$................ (1) (सम्पूरक कोणों का योग 180^0 होता है।)

पुनः प्रश्नानुसार $x = y + 18^0$.......... (2)

समी. (2)से x का मान समी. (1)में रखने पर -

$y + 18^0 + y = 180^0$

$2y + 18^0 = 180^0$

$2y = 180^0 - 18^0$

$2y = 162^0$

$y = \frac{162}{2} = 81^0$

y का मान समी. (2)में रखने पर

$x = 81^0 + 18^0 = 99^0$

$\therefore$ कोण $99^0, 81^0$

7. यदि हम अंश में 1 जोड़ दे तथा हर में से 1 घटा दे, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दे तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है, भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल. माना भिन्न का अंश = x व हर = y

अतः भिन्न $= \frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार स्थिति -I

$\frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{1}$

वज्र गुणा करने पर

$x + 1 = y - 1$

$\Rightarrow x - y = -2$ ...... (1)

प्रश्नानुसार स्थिति -II

$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$

वज्र गुणा

$\Rightarrow 2x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - y = 1$ ...... (2)

समी. (2) में से (1) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x - y = -2 \\ - \quad + \quad + \\ \hline x \quad = 3 \end{array}$$

x का मान सभी (1) में रखने पर

$3 - y = -2$

$-y = -2 - 3$

$-y = -5$

$\Rightarrow y = 5$

अतः भिन्न $= \frac{3}{5}$

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न -

1. एक आयाताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 मी. अधिक है, का अर्द्धपरिमाप 36 मी. है। बाग की विभाएँ ज्ञात कीजिए।
2. पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जायेगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है।
3. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

4 द्विघात समीकरण

रिक्त स्थान प्रश्न 1 अंक (1), दीर्घ प्रश्न - 1, अंक (3) कुल अंक = 4

❖ **श्रीधराचार्य सूत्र - द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c = 0$ के मूल श्रीधराचार्य सूत्र से** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

चर के दो मान $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

प्राप्त होते है।

❖ **द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के**

(i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते है यदि b^2-4ac > 0 हो

(ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते है यदि b^2-4ac = 0 हो,

(iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि b^2-4ac < 0 हो

❖ **द्विघात समीकरण बनाना जब मूलों का योग व गुणनफल दिया जाये -**

x^2 - (मूलों का योग)x + मूलों का गुणनफल = 0

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

रिक्त स्थान

01. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ के मूल वास्तविक व असमान होंगे यदि.............
हल- $b^2 - 4ac > 0$

02. एक चर वाले रैखिक समीकरण की घात........... होती है।
हल- 1

03. समीकरण $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ के मूलों का गुणनफल .... है।
हल- $\frac{c-a}{a-b}$

04. समीकरण $x^2 + 2x - 3 = 0$ के मूलों का योग --------- है।
हल- -2

05. समीकरण $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूलों का गुणनफल.........है।
हल = $\frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$

06. समीकरण $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूल समान हो तो c = ... होगा।
हल- $\frac{b^2}{4a}$

07. द्विघात समीकरण $4x^2 - 12x - 9 = 0$ के मूलों की प्रकृति .... होगी।
हल- वास्तविक एवं भिन्न

08. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तिकर D = ... होता है।
हल- $b^2 - 4ac$

❖ **दीर्घ प्रश्न -**

1. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांको का गुणनफल 306 है। पूर्णांको को ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x व $x + 1$ है।

अत: प्रश्नानुसार $x \times (x + 1) = 306$

$\Rightarrow x^2 + x = 306$

$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$

$x^2 + 18x - 17x - 306 = 0$

$x(x + 18) - 17(x + 18) = 0$

$(x + 18)(x - 17) = 0$

अत: $x + 18 = 0 \quad x = -18$ (ऋणात्मक पूर्णांक)

या $x - 17 = 0 \quad x = 17$

$\therefore$ दो धनात्मक पूर्णांक $x = 17$

व $x + 1 = 17 + 1 = 18$ है।

4. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल. माना पहली संख्या = x

$\therefore$ दूसरी संख्या = $27 - x$

प्रश्नानुसार $x \times (27-x) = 182$

$\Rightarrow 27x - x^2 = 182$

$\Rightarrow -x^2 + 27x - 182 = 0$

या $x^2 - 27x + 182 = 0$

या $x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$

$x(x - 13) - 14(x - 13) = 0$

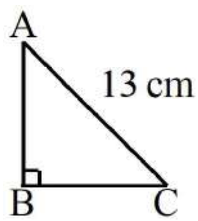
$\therefore (x - 13)(x - 14) = 0$

अतः $x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13$

या $x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14$

अतः दो धनात्मक पूर्णांक 13 और 14 या 14 और 13 है।

5. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी. कम है। यदि कर्ण 13 सेमी. है, तो अन्य दो भूजाएँ ज्ञात कीजिए।



हल. माना समकोण त्रिभुज का आधार BC = x सेमी.

अतः समकोण त्रिभुज की ऊँचाई AB = (x - 7) सेमी.

कर्ण AC = 13 सेमी.

समकोण Δ ABC में पाइथोगोरस प्रमेय से -

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 + AB^2$

$\Rightarrow (13)^2 = x^2 + (x - 7)^2$

$\Rightarrow 169 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$\Rightarrow 169 = 2x^2 - 14x + 49$

या $2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 - 14x - 120 = 0$

$x^2 - 7x - 60 = 0$

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

$x(x-12) + 5(x - 12) = 0$

$\therefore (x - 12)(x + 5) = 0$

$x - 12 = 0 \quad x = 12$

या $x + 5 = 0 \quad x = -5$ (भुजा की लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती)

$\therefore$ समकोण त्रिभूज का आधार BC = 12 सेमी.

ऊँचाई AB = 12 - 7 = 5 सेमी.

6. द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि द्विघात समीकरण के दोनों मूल बराबर हो।

हल. द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$

इस समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

a = 2, b = k, c = 3

$\because$ द्विघात समीकरण के दोनों मूल बराबर है।

अतः विविक्तकर $b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (k)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 24 = 0$

$k^2 = 24$

$k = \pm\sqrt{24}$

$k = \pm\sqrt{4\times 6} = \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore k = \pm 2\sqrt{6}$

7. द्विघात समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल. द्विघात समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ की तुलना

$ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

a = 2, b = –6, c = 3

विविक्तिकर $= b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 36 - 24$

$= 12 > 0$

अतः द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न है।

द्विघात समीकरण के मूल $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \times 2}$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$

$= \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2[3 \pm \sqrt{3}]}{4}$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

अतः द्विघात समीकरण के मूल $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ व $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ है।

8. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता

है, प्रत्येक खिलौने का मूल्य (रुपयों में) 55 में से एक दिन में निर्माण किये गये खिलौने की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। उस दिन निर्माण किये गये खिलौने की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. निम्न द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए -

(i) $6x^2 - x - 2 = 0$

(ii) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

5 समान्तर श्रेढ़ी (A.P.)

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (2) रिक्त स्थान प्रश्न - 1, अंक (1), लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न -1, अंक (1) कुल अंक = 6

- समांतर श्रेढ़ी- संख्याओं का ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद अपने से ठीक पहले पद में एक अचर संख्या जोड़ने पर प्राप्त होता है।
- यह अचर संख्या (d) समांतर श्रेढ़ी (AP) का सार्वअन्तर कहलाता है, जो धनात्मक, ऋणात्मक या शुन्य हो सकता है।
- सार्व अन्तर (d) = अनुगामी पद - पूर्वगामी पद
- किसी A.P. का प्रथम पद 'a' तथा सार्व अन्तर 'd' हो A.P. का व्यापक रूप - a, a+d, a+2d, a+3d......
- A.P. का व्यापक पद (n वाँ पद) $a_n = a+(n-1)d$
- यदि अंतिम पद नहीं दिया हो तो m पदों वाली AP में, अन्त से n वां पद = शुरू से (m-n+1) वां पद
  अर्थात अन्त से n वां पद = a+(m-n) d
- A.P. के प्रथम n पदों का योगफल, $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$
- n पदों वाली A.P. का अंतिम पद 'l' हो तो $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$
- प्रथम n धनात्मक पूणार्कों का योगफल $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं तो 2b = a+c
  यहाँ b, A.P. का समांतर माध्य कहलाता है।
- $a_n = S_n - S_{n-1}$
- $d = a_n - a_{n-1}$

Ex1. AP : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}$,...... का प्रथम पद व सार्व अन्तर क्या हैं?

हल:- प्रथम पद $(a_1) = 3/2$, $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

$$a_3 - a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{3}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = -1$$

अत: सार्व अन्तर (d) = -1

Ex2. AP: 3, 8, 13, ... 253 का अन्त से 20 वां पद ज्ञात करो।

हल:- प्रथम पद =3, सार्व अन्तर = 8-3=5

AP को उल्टा करने पर, प्रथम पद = 253, सार्व अन्तर = -5 अन्त से 20 वां पद = a + (n-1) d

= 253 + (20-1) (-5)

= 253 - 95

= 158

Ex3. AP: 5, x, y, $9\frac{1}{2}$ में x व y का मान ज्ञात करें।

हल:- प्रथम पद =5

अंतिम पद $(a_n) = 9\frac{1}{2} = \frac{19}{2}$

माना सार्व अंतर 'd' है तो $a_n = a + (n-1)d$

$$\Rightarrow \frac{19}{2} = 5 + (4-1)d$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} = 3d$$

$$\Rightarrow d = 3/2$$

$$x = 5 + 3/2 = 5\frac{3}{2}$$

$$y = 5\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 8$$

Ex4. AP: 24, 21, 18,........ के कितने पदों का योग 78 होगा?

हल:- प्रथम पद =24, सार्व अंतर (d) = 21-24= -3, S_n= 78, n=?

$$\because \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = S_n$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[2 \times 24 + (n-1) \times (-3)] = 78$$

$$\Rightarrow n(48 - 3n + 3) = 156$$

$\Rightarrow 3n^2 - 51n + 156 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 17n + 52 = 0$

$\Rightarrow (n-13)(n-4) = 0$

$\Rightarrow n = 4$ या $n = 13$ अत: AP के 4 पदों या13 पदों का योग 78 है।

बहुविकल्पात्मक प्रश्न

01. समान्तर श्रेढ़ी 5, 7, 9, 11........... का सातवाँ पद होगा-
(1) 20 (2) 25
(3) 17 (4) 35 (3)

02. समान्तर श्रेढ़ी -5, -1, 3, 7.......... का सार्वअन्तर होगा-
(1) 5 (2) 4
(3) -4 (4) -5 (2)

03. निम्नलिखित में से कौनसी समान्तर श्रेढ़ी है-
(1) 2, 4, 8, 16.............
(2) -10, -6, -2, 2........
(3) 3, 5, 4, 2.............
(4) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}....$ (2)

04. यदि समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 2 व सार्वअन्तर 3 हो तो n वाँ पद कौनसा होगा-
(1) 2n - 1 (2) 2n + 1
(3) 3n - 1 (4) 3n + 1 (3)

05. श्रेढ़ी -6, -3, 0, 3......... का अगला पद है-
(1) 6 (2) -6
(3) 9 (4) 2 (1)

06. A.P. -3, $-\frac{1}{2}$, 2.............. का 11 वाँ पद है-
(1) 28 (2) 22
(3) -38 (4) $-48\frac{1}{2}$ (2)

07. A.P. 10, 7, 4..... का 30 वाँ पद है-
(1) 97 (2) 77
(3) -77 (4) -87 (3)

08. यदि A.P. का n वाँ पद 3n + 5 है तो इसका सार्वअन्तर होगा-
(1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 5 (3)

09. एक समान्तर श्रेणी का प्रथम एवं अंतिम पद क्रमश: 2 तथा 8 है n पदों का योग 90 हैं तो n का मान होगा-
(1) 13 (2) 14
(3) 15 (4) 18 (4)

10. यदि समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 4 और सार्वअन्तर -3 हो तो AP होगी-
(1) 4, 7, 11, 14......... (2) 4, 1, -2, -5,.........
(3) 4, -1, 2, 5........... (4) -4, -2, -5, 7........ (2)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

01. A.P. के प्रथम चार पद लिखिए यदि a = -1, d = $\frac{1}{2}$ हो।

हल- A.P. का प्रथम पद a = -1

सार्वअन्तर d = $\frac{1}{2}$

$a_1 = a = -1$

$a_2 = a + d = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_3 = a + 2d = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0$

$a_4 = a + 3d = -1 + 3 \times \frac{1}{2} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

A.P. के प्रथम चार पद $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ है।

02. A.P. 0.6, 1.7, 2.8, 3.9,.......... का प्रथम पद व सार्वअन्तर लिखिए।

हल- A.P. का प्रथम पद a = 0.6

सार्वअन्तर d = $a_2 - a_1$ = 1.7 - 0.6 = 1.1

03. यदि a = 5, d = 3, a_n = 50 दिया है। n व s_n ज्ञात कीजिए-

हल- $a = 5, d = 3$

$a_n = 50$

$a + (n-1)d = 50$

$5 + (n-1)3 = 50$

$5 + 3n - 3 = 50$

$3n + 2 = 50$

$3n = 50 - 2$

$3n = 48$

$n = \frac{48}{3}$

$n = 16$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$
$$= \frac{16}{2}[5 + 50]$$
$$= \frac{16}{2} \times 55 = 8 \times 55$$
$$= 440$$

04. A.P. 21, 18, 15.......... का कौनसा पद शून्य है-
सार्वअन्तर d = 18-21=-3
प्रथम पद a = 21

$$a_n = 0$$
$$a + (n-1)d = 0$$
$$21 + (n-1)(-3) = 0$$
$$21 - 3n + 3 = 0$$
$$24 - 3n = 0$$
$$-3n = -24$$
$$n = -\frac{-24}{-3}$$
$$n = 8$$

A.P. का 8 वाँ पद शून्य है।

◈ रिक्त स्थान-

1. यदि 10, m,-2 समांतर श्रेढ़ी में हैं तो m का मान ...... है।

हल:- 10, m,-2 A.P. है $\Rightarrow 2m = 10 + (-2)$

$\Rightarrow m = 4$

2. $AP: -3, -\frac{1}{2}, 2, ...$ का 11 वां पद .... है।

हल:- $a = -3, d = -\frac{1}{2} - (-3)$ $\qquad a_{11} = -3 + (11-1) \times \frac{5}{2}$

$= -\frac{1}{2} + 3$ $\qquad = -3 + 10 \times \frac{5}{2}$

$= 5/2$ $\qquad = 22$

3. [ ], 13, [ ], 3 समांतर श्रेढ़ी में हैं।

हल:- 18,8

4. A.P. का व्यापक पद का सूत्र .... है।

हल:- $a_n = a+(n-1) d$

5. एक परिमित AP का अंतिम पद 'l' है तो सभी पदों का योग सूत्र .... से प्राप्त होता हैं।

हल:- $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

6. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का योग .... होता है।

हल:- $s_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

7. AP का n वां पद a_n= 3+4n है तो सार्व अंतर .... होगा।

हल:- $a_n = 3+4n$
$a_{n-1} = 3+4(n-1)$
$d = a_n - a_{n-1}$
$= 3 + 4n - 3 - 4(n-1)$
$= 3 + 4n - 3 - 4n + 4$
$= 4$

8. AP: 7, 13, 19,........, 205 में पदों की संख्या .... है।

हल:- $a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 205 = 7 + (n-1) \times 6$
$\Rightarrow 198 = 6n - 6$
$\Rightarrow 6n = 204$
$\Rightarrow n = 34$

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्न -

1. AP ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 5 है तथा सातवां पद 9 है।

हल:- माना AP का प्रथम पद 'a' तथा सार्व अंतर 'd' है।
$a_3 = 5$
$a + 2d = 5$ .... (1)
$a_7 = 9$
$a + 6d = 9$ .... (2)
समी. (2) में से समी. (1) घटाने पर
$a + 6d = 9$
$\underline{{}_{-}a \pm 2d =_{-} 5}$
$4d = 4$
$\Rightarrow d=1$
d=1, समी. (1) में रखने पर
$a + 2 \times 1 = 5$
$a = 3$
अत: AP: 3, 4, 5, 6, ...

2. 3 अंको वाली कितनी सख्याएं 7 से विभाज्य है?

हलः- 3 अंको वाली 7 से विभाज्य संख्याएँ AP: 105, 112, 119, ... 994

$a = 105, d=112-105=7, a_n = 994$

सुत्र $a + (n-1)d = a_n$ से

$\Rightarrow 105 + (n-1)7 = 994$

$\Rightarrow (n-1)7 = 994-105$

$\Rightarrow n-1 = 889/7$

$\Rightarrow n = 127 + 1$

$\Rightarrow n = 128$ अतः 3 अंको वाली 128 सख्याएं 7 से विभाज्य हैं।

3. उस AP का 31 वां पद ज्ञात करों जिसका 11 वां पद 38 तथा 16 वां पद 73 है।

हलः- माना AP का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअंतर 'd' है।

दिया है- $a_{11} = 38$

$\Rightarrow a + (11-1)d = 38$

$\Rightarrow a + 10d = 38$ .... (1)

$a_{16} = 73$

$\Rightarrow a + 15d = 73$ .... (2)

समी. (2) में से समी. (1) घटाने पर

$a + 15d = 73$

$a \pm 10d = 38$

$5d = 35$

$\Rightarrow d = 7$

d=7,समी. (1) में रखने पर

$a + 10 \times 7 = 38$

$\Rightarrow a = 38 - 70$

$\Rightarrow a = -32$

अतः $a_{31} = a + 30d$

$= -32 + 30 \times 7$

$= -32 + 210$

$= 178$

4. किसी AP का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 तथा पदों का योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात करो।

हलः- $a= 5$, $l= 45$, $S_n = 400$, $n = ?$, $d = ?$

सुत्र $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ से

$\Rightarrow 400 = \frac{n}{2}(5+45)$

$\Rightarrow 800 = 50n$

$\Rightarrow n = 800/50$

$\Rightarrow n = 16$

$a + (n-1)d = a_n$

$\Rightarrow 5 + (16-1)d = 45$

$\Rightarrow 15d = 45 - 5$

$\Rightarrow d = 40/15$

$\Rightarrow d = 8/3$

अतः पदों का योग (n) = 16 सार्व अंतर (d) = 8/3

5. जाँच कीजिए कि AP: 11, 8, 5, 2,...... का कोई पद – 150 है या नहीं ?

हलः- माना दी गई AP का n वाँ पद - 150 है

अतः $a + (n-1)d = a_n$ से

$\Rightarrow 11 + (n-1)(-3) = -150$

$\Rightarrow -3n + 3 = -150 - 11$

$\Rightarrow -3n = -161 - 3$

$\Rightarrow n = -164/-3$

$\Rightarrow n = 54\frac{2}{3}$

चूंकि n का मान धनात्मक पूर्णांक नहीं है अतः दी गई AP का कोई भी पद - 150 नहीं है।

6. एक AP का 17 वां पद इसके 10 वें पद से 7 अधिक है। इस AP का सार्वअंतर ज्ञात कीजिये।

हलः- माना AP का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअंतर 'd' है।

प्रश्नानुसार

$a_{17} - a_{10} = 7$

$\Rightarrow [a + (17-1)d] - [a + (10-1)d] = 7$

$\Rightarrow a + 16d - a - 9d = 7$

$\Rightarrow 7d = 7$

$\Rightarrow d = 1$

अतः AP का सार्व अंतर = 1

7. निम्न योगफल ज्ञात कीजिए-

(i) प्रथम 1000 धनात्मक पूर्णाकों का

हलः- प्रथम n धनात्मक पूर्णाकों का योफल $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow S_{1000} = \frac{1000(1000+1)}{2}$

$\Rightarrow S_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2}$

$\Rightarrow S_{1000} = 500500$

8. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हल:- 8 के प्रथम 15 गुणजों से बनी AP: 8, 16, 24, ...

$a = 8, d=8, n=15, S_{15}= ?$

$\because S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2\times 8+(15-1)8]$

$= \frac{15}{2}(16+112)$

$= \frac{15}{2}\times 128$

$= 960$

अत: 8 के प्रथम 15 गुणजों का योगफल 960 होगा।

◈ दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न -

❖ 50 पदों वाली AP का तीसरा पद 12 तथा अंतिम पद 106 है। AP का 29 वां पद ज्ञात कीजिए।

❖ एक AP के चौथे व 8 वें पदों का योग 24, छठें व 10 वें पदों का योग 44 है। AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

❖ एक AP के प्रथम 7 पदों का योग 49 तथा प्रथम 17 पदों का योग 289 है। AP के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

❖ एक टी.वी सैट निर्माता तीसरे वर्ष में 600 टी.वी. तथा सातवें वर्ष 700 टी.वी. का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है। ज्ञात कीजिए-

(i) प्रथम वर्ष में उत्पादन

(ii) 10 वें वर्ष में उत्पादन

(iii) प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादन।

6 त्रिभुज

बहुविकल्प प्रश्न-1, अंक (1), रिक्त प्रश्न - 1, अंक (1), लघुत्तरात्मक प्रश्न -1, अंक (2), कुल अंक = 4

❖ **समरूप आकृतियाँ** –वे सभी आकृतियाँ जिनके आकार समान होते हैं परन्तु माप समान होना आवश्यक नहीं है।

❖ **समरूप बहुभुज**– समान भुजाओं वाले बहुभुज परस्पर समरूप · ãÜæ åæãüÖØ¡ - (i) संगत कोण समान हो।

(ii) संगत भुजाएं समानुपाती हो।

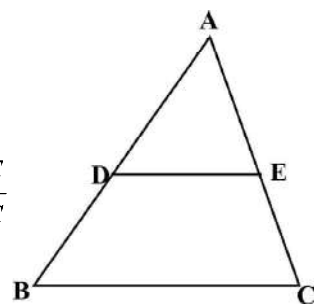
❖ सभी वृत, वर्ग, समबाहु त्रिभुज, रेखाखण्ड परस्पर समरूप होते हैं।

❖ दो समान कोणिक त्रिभुजों में संगत भुजाओं का अनुपात भी सदैव समान रहता है।

❖ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)– किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करती हुई रेखा खींची जाए तो यह इन दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

ΔABC में यदि $DE \parallel BC$

तो $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



साथ ही, $(i)\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $(ii)\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$

❖ **आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का विलोम**–किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

❖ त्रिभुजों की समरूपता हेतु कसौटियाँ–

(i) AAA (कोण - कोण - कोण) या AA (कोण - कोण)

(ii) SSS (भुजा - भुजा - भुजा)

(iii) SAS (भुजा - कोण - भुजा)

❖ सभी सर्वागसम आकृतियाँ समरूप होती है परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वागसम होना आवश्यक नहीं है।

◈ बहुविकल्प प्रश्न –

प्र. 1. दो बहुभुज समरूप होंगे यदि ?

(अ) संगत कोण समान हो (ब) संगत भुजाएं समानुपाती हों

(स) दोनों 'अ' तथा 'ब' (द) इनमें से कोई नहीं (स)

प्र. 2. निम्न में से त्रिभुजों के लिए समरूपता की कसौटी नहीं है?

(अ) AAA (ब) SSS

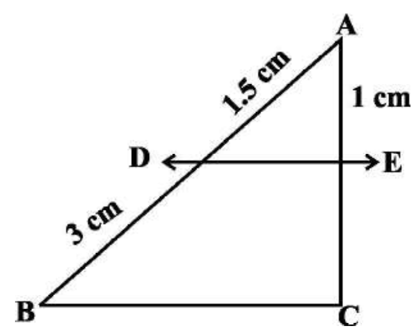
(स) SAS (द) ASA (द)

प्र. 3. किस प्रकार के त्रिभुज सदैव समरूप होते हैं–?

(अ) विषम बाहु त्रिभुज (ब) समबाहु त्रिभुज

(स) समद्विबाहु त्रिभुज (द) समकोण त्रिभुज (ब)

प्र. 4. सलंग्न आकृति में DE || BC हो तो EC की लम्बाई का माप होगा?



(अ) 2 cm (ब) 1 cm

(स) 4.5 cm (द) 1.5 cm (अ)

प्र. 5. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हो तो निम्न में से कौनसा कथन असत्य है–

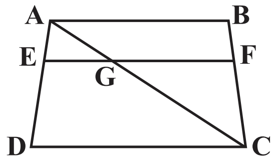
(अ) $\angle C = \angle R$ (ब) BC = QR

(स) AC = QR (द) $\angle B = \angle Q$ (स)

◈ लघुतरात्मक प्रश्नः–

प्र. 1. ABCD एक समलम्ब है जिसमें AB//DC है। असमांतर भुजाओं AD और BC पर क्रमशः बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा AB के समांतर हैं। दर्शाइये

कि $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$



हलः- AC को मिलाया जो EF को G पर काटती है।

AB || DC (दिया)

EF || AB (दिया है)

EF || DC

Δ ADC में EG || DC

$\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से) ... (1)

इसी प्रकार Δ CAB में

$\frac{BF}{FC}=\frac{AG}{GC}$ ... (2)

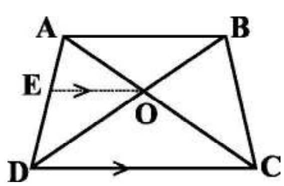
(1) व (2) से

$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ (इति सिद्धम)

प्र. 2. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है।

हलः- दिया है-

$\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$



$\Rightarrow \frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}$..............$(i)$

$EO \parallel DC$ की रचना से

ΔADC में $, EO \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{DE}=\frac{AO}{CO}$

(थेल्स प्रमेय से) .... (2)

$\varepsilon q^n(1)$ व $\varepsilon q^n(2)$ से $\frac{BO}{DO}=\frac{AE}{DE}$

थेल्स प्रमेय के विलोम से, $EO \parallel AB$

अब चूँकि $EO \parallel DC$ (रचना से)

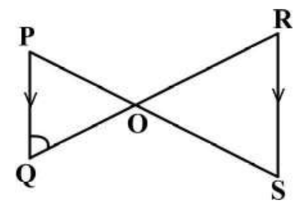
तथा $EO \parallel AB$ (सिद्ध किया है।)

अतः $AB \parallel DC$

$\Rightarrow ABCD$ एक समलंब है।

प्र. 3. सलंग्न आकृति में यदि PQ || RS तो सिद्ध किजिए कि -

$\Delta POQ \sim \Delta SOR$



हलः- दिया है कि PQ || RS

$\Rightarrow \angle PQO=\angle ORS$ (एकांतर कोण)

तथा $\angle POQ=\angle SOR$ (शिर्षाभिमुख कोण)

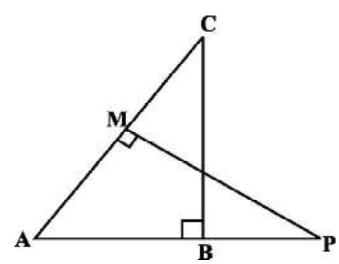
अतः AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (इति सिद्धम)

प्र. 4. संलग्न आकृति में Δ ABC और Δ AMP दो समकोण त्रिभुज है जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA}=\frac{BC}{MP}$



हलः- (i) ΔABC व ΔAMP में

$\angle ABC=\angle AMP$ (प्रत्येक समकोण)

$\angle CAB=\angle MAP$ (उभयनिष्ठ)

AA (कोण - कोण) समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABC \sim \Delta AMP$ इति सिद्धम

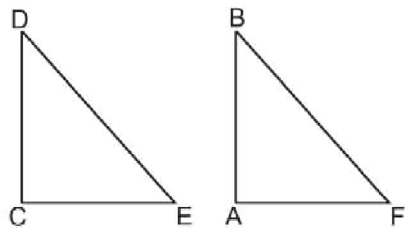
(ii) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएं समानुपाती होती है। अतः

$\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ इतिसिद्धम

प्र. 5. लंबाई 6 मी.वाले एक उर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 मी. है। जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 मी. है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

हल:-



स्तंभ CD = 6m.

मीनार AB = ?

$\because \Delta EDC \sim \Delta EBA$ (AAसमरूपता से)

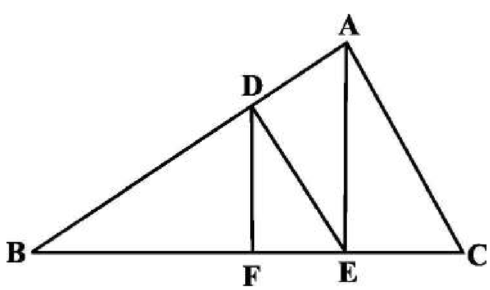
$\Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{DC}{BA}$

$\Rightarrow \frac{4}{28} = \frac{6}{BA}$

$\Rightarrow AB = \frac{28 \times 6}{4}$

$\Rightarrow AB = 42$ मी. अत: मीनार की ऊँचाई = 42 मी.

प्र. 6. संलग्न आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।



हल:- दिया है- $DE \parallel AC$, $DF \parallel AE$

सिद्ध करना है- $\Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

उपपत्ति - ΔBAC में, $DE \parallel AC$

$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$ (थेल्स प्रमेय से)............ (1)

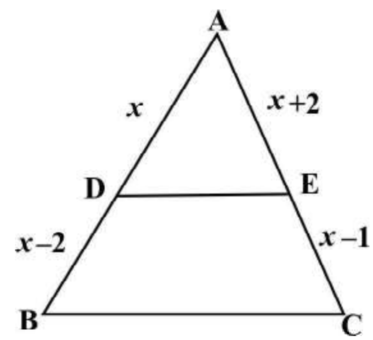
इसी प्रकार ΔBAE में, $DF \parallel AE \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE}$ ....(2)

समी. (1) व (2)से, $\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FE}$ इति सिद्धम्

प्र. 7. चित्र में $DE \parallel BC$,

$AD = x, DB = x - 2, AE = x + 2$

तथा $EC = x - 1$ हो तो x का मान ज्ञात करो।



हल:- ΔABC में, $DE \parallel BC$

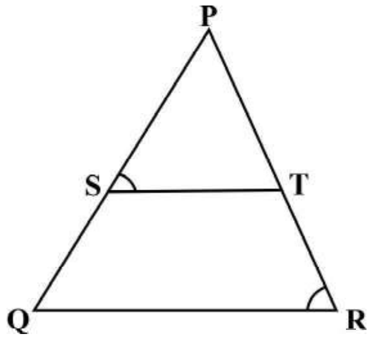
$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

$\Rightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

$\Rightarrow x^2 - x = x^2 - 4$

$\Rightarrow x = 4$

प्र. 8. संलग्न आकृति में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है। सिद्ध करो कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल. दिया है - $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

$\Rightarrow ST \parallel QR$ (थेल्स प्रमेय के विलोम से)

$\Rightarrow \angle PST = \angle PQR$ (संगत कोण).......... (1)

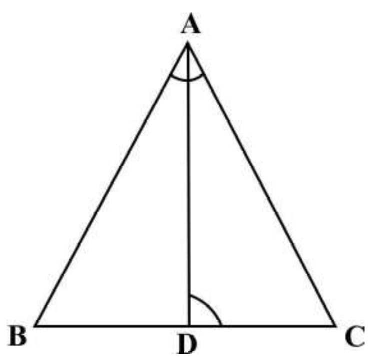
दिया है- $\angle PST = \angle PRQ$ ....(2)

समी. (1)व (2) से , $\angle PQR = \angle PRQ$

$\Rightarrow PQ = PR$ (समान कोणों की सम्मूख भुजा)

$\Rightarrow \Delta PQR$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है। इति सिद्धम्

प्र. 9. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि ∠ADC = ∠BAC है। दर्शाइये कि CA^2 = CB.CD



हल:- दिया है- ΔABC में भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$

सिद्ध करना है- $CA^2 = CB.CD$

उपपति- ΔABC व ΔDAC में

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle BAC = \angle ADC$ (दिया है)

$\because$ AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABC \sim \Delta DAC$

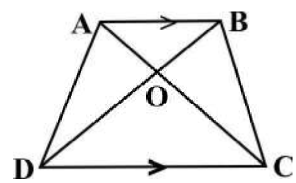
$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

वज्र गुणन से,

$CA.CA = CB.CD$

$\Rightarrow CA^2 = CB.CD$ इति सिद्धम्

प्र. 10. समलंब चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए दर्शाइये कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$



हल:- दिया है- चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$

सिद्ध करना - $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

उपपति - $\because AB \parallel DC$ और AC तिर्यक रेखा है

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OCD$ (एकांतर कोण)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षा भिमुख कोण)

AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ इति सिद्धम्

7 निर्देशांक ज्यामिति

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), रिक्त स्थान प्रश्न प्रश्न - 1, अंक (1)
लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), दीर्घउत्तरात्मक - 1 (3 अंक) , कुल अंक = 7

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. मूल बिन्दु के निर्देशांक होते है?
(1) (1, 1) (2) (0, 0)
(3) (1, 0) (4) (2, 2) (2)

2. निर्देशांक (-1, 1) में भुज और कोटि का मान क्रमशः है?
(1) भुज=-1, कोटी = 1 (2) भुज=1, कोटि=-1
(3) भुजा=1, कोटी=0 (4) भुज=0, कोटि=-1 (1)

3. यदि बिन्दु (K, 2) तथा (3, 4) के बीच की दूरी $\sqrt{8}$ हो तो k का मान होगा?
(1) k = 5, 1 (2) k = -5, 1
(3) k = -1, -5 (4) k = -1, 5 (1)

4. बिन्दु (5,-2) की y - अक्ष से दुरी है?
(1) -2 (2) 5
(3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं (2)

5. बिन्दु (-1, 1) कौनसे चतुर्थांश में स्थित है?
(1) प्रथम (2) द्वितीय
(3) तृतीय (4) चुतर्थ (2)

6. यदि बिन्दुओं (3, a) और (4, 1) के बीच की दूरी $\sqrt{10}$ हो तो a का मान होगा?
(1) 3, -1 (2) 2, -2
(3) 4, -2 (4) 5, -3 (3)

7. X- अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु की कोटि होती है?
(1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) इनमेंसे कोई नहीं (3)

8. बिन्दु (-x, -y) की मूल बिन्दु से दूरी होगी?
(1) -x (2) -y
(3) x^2+y^2 (4) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4)

9. यदि बिन्दु Q (0,1), बिन्दुओं P(5, -4) और R (x, 6) का मध्य बिन्दु है तो x का मान कितना होगा?
(1) 5 (2) -5
(3) 4 (4) 6 (2)

10. यदि एक वृत का केन्द्र (3, 5) है तथा एक व्यास के अंत बिन्दु (4, 7) तथा (2, y) हैं तो y का मान कितना होगा?
(1) 2 (2) 3
(3) 5 (4) 0 (2)

11. यदि बिन्दुओं A(4, P) तथा B(1, 0) के बीच की दूरी 5 इकाई है तो P का मान है?
(1) केवल 4 (2) केवल -4
(3) ± 4 (4) 0 (3)

12. X- अक्ष पर स्थित बिन्दु P जो बिन्दुओं A (-1, 0) तथा B(5, 0) से समदूरस्थ हैं, वह हैं?
(1) (O, 2) (2) (2, 2)
(3) (2, 0) (4) इनमें से कोई नहीं (3)

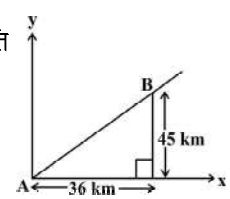
◈ रिक्तस्थान प्रश्न -

1. दो बिन्दूओं के बीच दूरी सूत्र .... है।
उ. $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

2. y - अक्ष पर स्थित किसी बिन्दू के निर्देशांक .... होते हैं।
उ. (0, y)

3. आकृतियों की ज्योमिति का अध्ययन करने के लिए .... का उपयोग किया जाता है।
उ. निर्देशांक ज्यामिति।

4. आकृति



में A से B के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए .... का प्रयोग किया जाता है?
उ. पाइथागोरस प्रमेय।

5. विभाजन सूत्र .... है?
उ. $\left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

6. बिंदू (0, 0) और (36,15) के बीच की दूरी .... है?

उ. 39

7. निर्देशांक $\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$ में m_1 व m_2 के मान क्रमशः ...., ... हैं।

उ. K, 1

8. बिन्दू (2, 3) और (4, 6) को मिलाने वाले मध्य बिन्दू के निर्देशांक .... है।

उ. $\left(3, \frac{9}{2}\right)$

9. समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर .... होतें है।

उ. समद्विभाजित

10. x - अक्ष पर स्थित किसी बिन्दू के निर्देशांक .... होते हैं।

उ. (x, 0)

◈ लघुतरात्मक प्रश्न -

1. किसी वर्ग के सम्मुख शीर्ष (-5,-4) और (3, 2) है तो इसके विकर्ण की लंबाई लिखिए।

हल. वर्ग के विकर्ण की लंबाई

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(3+5)^2+(2+4)^2}$$
$$=\sqrt{8^2+6^2}$$
$$=\sqrt{64+36}$$
$$=10$$

2. बिन्दुओं A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2) तथा D(-3, 0) से बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार बताइये।

हल.

$$\text{दूरी } AB=\sqrt{(1+1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$
$$\text{दूरी } BC=\sqrt{(-1-1)^2+(2+0)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$
$$\text{दूरी } CD=\sqrt{(-3+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$
$$\text{दूरी } AD=\sqrt{(-1+3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

इसी प्रकार -

विकर्ण AC = विकर्ण BD

अतः चतुर्भुज ABCD एक वर्ग की आकृति है।

3. यदि Q(0, 1) बिन्दुओं P(5,-3) और R(*x*, 6) से समदूरस्थ हैं तो *x* के मान ज्ञात करों?

हल. ∵ बिन्दु Q, P तथा R से समदुरस्थ है

∴ दूरी PQ = दूरी QR

$$\sqrt{(5-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(0-x)^2+(1-6)^2}$$
$$\sqrt{25+16}=\sqrt{x^2+25}$$
$$41=x^2+25$$
$$\Rightarrow x^2=41-25$$
$$x=\sqrt{16}$$
$$x=\pm 4$$

4. Y- अक्ष पर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करों जो बिन्दुओं A(6,5) और B (-4, 3) से समपूरस्थ है?

हल. माना Y - अक्ष पर बिन्दू P (0,Y) है।

अतः दूरी PA = दूरी PB

$$\sqrt{(6-0)^2+(5-y)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(3-y)^2}$$
$$\sqrt{36+25+y^2-10y}=\sqrt{16+9+y^2-6y}$$
$$61+y^2-10y=25+y^2-6y$$
$$-10y+6y=-61+25$$
$$-4y=-36$$
$$y=\frac{36}{4}=9$$

अतः P (0, 9) बिन्दू हैं।

5. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करों जो बिन्दुओं (4, -3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को आंतरिक रूप से 3:1 के अनुपात में विभाजित करता है?

हल. माना वह बिन्दू P(*x*, y) है

विभाजन सूत्र से,

$$P(x,y)=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$
$$P(x,y)=\left(\frac{3\times8+1\times4}{3+1}, \frac{3\times5+1\times-3}{3+1}\right)$$

$$P(x,y)=\left(\frac{24+4}{4},\frac{15-3}{4}\right)$$

$$P(x,y)=(7,3)$$

6. यदि बिन्दु A(6,1), B(8,2), C(9,4) और D (P,3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हों तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल. समांतर चतु. के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है

अतः विकर्ण AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{6+9}{2},\frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2},\frac{2+3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2};\frac{5}{2}\right) =\left(\frac{8+P}{2};\frac{5}{2}\right)$$

दोनों तरफ X- निर्देशांक की तुलना करने पर,

$$\frac{15}{2} =\frac{8+P}{2}$$

$$15 =8+P$$

$$\Rightarrow P =15-8=7$$

$$P = 7$$

7. Y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु P (2,-3) तथा Q (10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल. दूरी $PQ=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

$$10=\sqrt{(10-2)^2+(y-(-3))^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$10^2 = 8^2 + (y+3)^2$

$100 = 64 + y^2 + 9 + 6y$

$y^2+6y = 100-73$

$y^2+6y = 27$

$y^2 + 6y - 27 = 0$

$y(y+9) - 3(y+9) = 0$

$(y+9)(y-3) = 0$

या तो $y + 9 = 0$ या $y - 3 = 0$

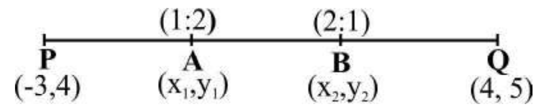
$y = -9$, $y = 3$

अतः $y = 3, -9$

◈ दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न -

1. बिन्दुओं P(-3,4) और Q (4,5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल.



बिन्दू A के लिए $m_1=1, m_2=2$

$x_1=-3, x_2=4$

$y_1=4, y_2=5$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{1\times4+2\times-3}{1+2},\frac{1\times5+2\times4}{1+2}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{4-6}{3},\frac{5+8}{3}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{-2}{3},\frac{13}{3}\right)$$

$$A(x_1,y_1)=\left(\frac{-2}{3},\frac{13}{3}\right)$$

बिन्दू B के लिए $m_1=2, m_2=1$

$x_1=-3, x_2=4$

$y_1=4, y_2=5$

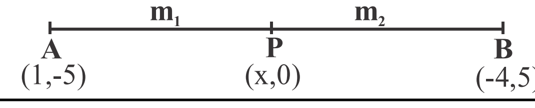
$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{2\times4+1\times-3}{2+1},\frac{2\times5+1\times4}{2+1}\right)$$

$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{8-3}{3},\frac{10+4}{3}\right)$$

$$B(x_2,y_2)=\left(\frac{5}{3},\frac{14}{3}\right)$$

2. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं A(1,-5) और B (-4,5) को मिलाने वाला रेखाखण्ड X- अक्ष से विभाजित होता है तथा इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल. माना x - अक्ष पर अभीष्ट बिन्दू P(x,0) है।



बिन्दू P के निर्देशांक

$$=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$(x,0)=\left(\frac{m_1\times -4+m_2\times 1}{m_1+m_2},\frac{m_1\times 5+m_2\times -5}{m_1+m_2}\right)$$

$$(x,0)=\left(\frac{-4m_1+m_2}{m_1+m_2},\frac{5m_1-5m_2}{m_1+m_2}\right)$$

दोनों तरफ Y- निर्देशांक की तुलना करने पर,

$$\frac{5m_1-5m_2}{m_1+m_2} \times \frac{0}{1}$$

$5m_1-5m_2 = 0$

$5(m_1-m_2) = 0$

$m_1-m_2 = 0$

$m_1=m_2$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{1}$$

अतः $m_1:m_2 = 1:1$

अतः पुनः X- निर्देशांक की तुलना करने पर

$$x=\frac{-4m_1+m_2}{m_1+m_2}$$

$$x=\frac{-4+1}{1+1}(m_1 \text{ व } m_2 \text{ के मान रखने पर })$$

$$x=\frac{-3}{2}$$

∴ विभाजन बिन्दू के निर्देशांक

P(x, 0)

$P\left(\frac{-3}{2},0\right)$ हैं।

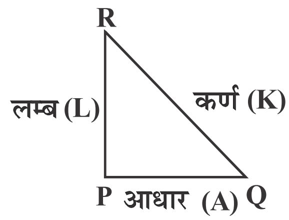
❖❖❖

8 त्रिकोणमिति का परिचय

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), रिक्त स्थान प्रश्न प्रश्न - 1, अंक (1) दीर्घ प्रश्न - 1, अंक (3)
लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (1), कुल अंक = 8

❖ **त्रिकोण मितीय अनुपात:-** समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उसके न्यूनकोणों के सापेक्ष अध्ययन को त्रिकोण मितीय अनुपात कहते है।

$\frac{\text{LAL}}{\text{KKA}}$



$\sin\theta = \frac{L}{K}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{A}{L}$

$\cos\theta = \frac{A}{K}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{K}{A}$

$\tan\theta = \frac{L}{A}$ $\quad$ $\text{cosec}\theta = \frac{K}{L}$

❖ **व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय अनुपात -**

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta.\text{cosec}\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta.\sec\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta = 1$$

❖ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

❖ **विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी:-**

डिग्री / रेडियस / त्रिकोणमिति अनुपात	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (अपरिभाषित)
cotθ	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secθ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cotθ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

❖ त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाऐः-

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta, \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \Rightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\Rightarrow \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta, \Rightarrow \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. $\tan 45^0 + \cot 45^0$ का मान होगा-

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 0 (2)

हल. $\tan 45^0 + \cot 45^0$

$= 1 + 1 = 2$

2. $2\sin 45^0.\cos 45^0$ का मान ज्ञात करोः-

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 0 (1)

हल. $2\sin 45^0.\cos 45^0$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1$

3. $\tan^2 60$ का मान हैः-

(1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) 3 (4) $\frac{1}{3}$ (3)

हल. $\tan^2 60^0 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \{\because \tan 60^0 = \sqrt{3}\}$

4. $\sin^2 50^0 + \cos^2 50^0 + 1$ बराबर हैः-

(1) 2 (2) 1

(3) $\frac{1}{2}$ (4) 0 (1)

हल. $\sin^2 50^0 + \cos^2 50^0 + 1$

$= 1 + 1 = 2 \{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta\}$

5. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर हैः-

(1) 1 (2) 8

(3) 9 (4) 0 (3)

हल. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$= 9\left[\sec^2 A - \tan^2 A\right] = 9 \times 1 = 9 \{1 + \tan^2 A = \sec^2 A\}$

7. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\cos B = \frac{1}{2}$,तब ($A + B$) का मान हैः-

(1) 30^0 (2) 0^0

(3) 60^0 (4) 90^0 (4)

हल. $\sin A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin A = \sin 30^0$

$\Rightarrow A = 30^0$

$\cos B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos B = \cos 60^0$

$\Rightarrow B = 60^0$

$A + B = 30^0 + 60^0 = 90^0$

9. $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का $\theta = 45^0$ मान हैः-

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) -1 (2)

हल. $\theta = 45^0$ रखने पर :-

$= \frac{1 - \cos 2 \times 45^0}{\sin 2 \times 45^0} = \frac{1 - \cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{1 - 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

◈ रिक्त स्थान प्रश्न -

1. यदि $\sin\theta = \cos\theta$ तो $\theta =$ ....

हल. $\sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^0 \Rightarrow \theta = 45^0$

2. $\frac{1 - \tan^2 45^0}{1 + \tan^2 45^0} =$ ....

हल. $= \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$ $\quad \because \tan 45^0 = 1$

3. $\left(1 + \tan^2\theta\right)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$ का मान .... है।

हल. $= \sec^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$= \sec^2\theta\times\cos^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\times\cos^2\theta = 1$

4. **यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो, तो θ का मान......... होगा-**

हल. $\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan60^0$

$\Rightarrow \theta = 60^0$

5. **यदि $\tan A = 1$ है तो $\sec A =$ .... होगा:-**

हल. $\sec^2A = 1+\tan^2A$

$\Rightarrow \sec^2A = 1+(1)^2$

$\Rightarrow \sec^2A = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \sec A = \sqrt{2}$

◈ लघुतरात्मक प्रश्नः-

1. **$\sin^2 60^0 + \cos^2 30^0$ का मान है:-**

हल. $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}+\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. **$\frac{2\tan30^0}{1+\tan^2 30^0}$**

हल. $= \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\quad \because \tan30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. **त्रिकोणमितीय अनुपात $\tan A$ को $\sec A$ के पदों में लिखिए:-**

हल. $\because \sec^2A - \tan^2A = 1$

$\Rightarrow \sec^2A - 1 = \tan^2A$

$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2A - 1}$

4. **$\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta - 1}}$ का मान लिखिए :-**

हल. $= \frac{1}{\sqrt{\cot^2\theta}} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$ $\quad \{\because \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

5. **यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,**

$00 < A+B \le 90^0, A > B$ तो A व B का मान ज्ञात कीजिए-

हल. $\because \tan(A+B) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan60^0$

$\Rightarrow A+B = 60^0$........................(i)

तथा $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(A-B) = \tan30^0$

$A-B = 30^0$

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर :-

$A + B = 60^0$

$A - B = 30^0$

$2A \quad = 90^0$

$A = \frac{90^0}{2} = 45^0$ समी. (i) में रखने पर :-

$45^0 + B = 60^0$

$B = 60^0 - 45^0 = 15^0$

6. **$\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$ का मान है:-**

हल. $\frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{1}$

$= 5 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{4}{3} - 1$

$= \frac{5}{4} + \frac{16}{3} - \frac{1}{1}$

$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$

6. Δ ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

sinAcosC+cosAsinC

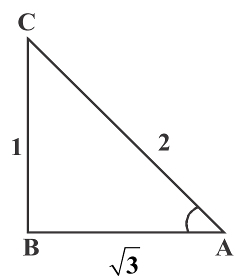
हल. $\because \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow L = 1, A = \sqrt{3}, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से :-

कर्ण^2 = आधार^2+लम्ब^2

कर्ण^2 $= (\sqrt{3})^2 + (1)^2$



$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 3 + 1

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 4

$\Rightarrow$ कर्ण = 2

सर्वप्रथम $\angle$ A के लिए :- $A = \sqrt{3}, L = 1, K = 2$

$\sin A = \frac{L}{K} = \frac{1}{2}, \cos A = \frac{A}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा $\angle$ C के लिए :- $A = 1, L = \sqrt{3}, K = 2$

$\cos C = \frac{A}{K} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{L}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

7. Δ OPQ जिसका कोण P समकोण है, OP=7cm और OQ-PQ=1cm, sinQ और cosQ के मान ज्ञात कीजिए-

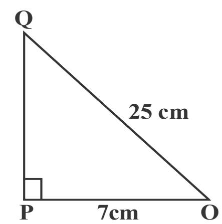
हल. Δ OPQ में

$\because$ OQ - PQ = 1

$\Rightarrow$ OQ = 1+PQ

पाइथागोरस प्रमेय से :-

कर्ण^2= आधार^2+लम्ब^2



$\Rightarrow OQ^2=OP^2+PQ^2$

$\Rightarrow (1+PQ)^2=7^2+PQ^2$

$\Rightarrow 1+PQ^2+2PQ=49+PQ^2$

$\Rightarrow 2PQ=48 = PQ=\frac{48}{2} = 24$

$\because OQ = 1 + PQ$

$\Rightarrow OQ = 1 + 24 = 25$

$\angle$Q के लिए :- A=24, L=7, K=25

$\sin Q = \frac{L}{K} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{A}{K} = \frac{24}{25}$

8. यदि 3cotA = 4, तो $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ का मान लिखिए:-

हल. 3cotA=4

$\cot A=\frac{4}{3}=\frac{A}{L}$

यहाँ A=4, L=3, K=?

पाइथागोरस प्रमेय से:-

कर्ण^2 = आधार^2+लम्ब^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 4^2+3^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 16 + 9

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 25

$\Rightarrow$ कर्ण = 5

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\left(\frac{L}{A}\right)^2}{1+\left(\frac{L}{A}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16-9}{16+9} = \frac{7}{25}$$

09. $\sin^2 60° - \cos^2 60°$ का मान ज्ञात कीजिए-

Ans. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

10. $\sqrt{1-\sin^2\theta}$ का मान $\theta = 30°$ पर ज्ञात कीजिए-

$$= \sqrt{\cos^2\theta} \qquad \left[\begin{array}{l}\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta\end{array}\right]$$

$= \cos\theta$

$= \cos 30°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

11. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ हो तब tanA + cotA का मान है-

Ans. $SinA = \frac{3}{5} = \frac{L}{K}$

यहाँ L = 3, K = 5, A = ?

पाइथागोरस प्रमेय से -

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

5^2 = आधार^2 + उचाई^2

25 = आधार^2 + 9

25 – 9 = आधार^2

16 = आधार^2

आधार $= \sqrt{16} = 4$

अब $\tan A = \frac{L}{A} = \frac{3}{4}$ व $\cot A = \frac{4}{3}$

$$\tan A + \cot A = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{9+16}{12} = 25/12$$

◈ निबंधात्मक प्रश्न -

1. सिद्ध कीजिए-
$(\sin A+\operatorname{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2A+\cos^2A$

हल. L.H.S. = $(\sin A + \operatorname{cosec}A)^2 + (\text{cas}A + \sec)^2$

$= \sin^2A+\operatorname{cosec}^2A + 2\sin A.\operatorname{cosec}A+\cos^2A+\sec^2A+2\cos A.\sec$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2.\sin A\,\frac{1}{\sin A} + 2.\cos A.\frac{1}{\cos A} + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$= 1+2+2+\operatorname{cosec}^2A+\sec^2A$

$= 5 + \operatorname{cosec}^2A+\sec^2A$

$= 5 + 1 + \cot^2A + 1 + \tan^2A$

$\{\because \text{cose}^2A=1+\cot^2A,\ \sec^2A=1+\tan^2A$

$= 7 + \tan^2A+\cot^2A$

= R.H.S. इति सिद्धम

2. सिद्ध कीजिए:- $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

हल. L.H.S. $= \frac{\cos A}{(1+\sin A)} + \frac{(1+\sin A)}{\cos A}$

$$= \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2}{\cos A} = \frac{2.1}{\cos A} = 2.\sec A$$

= R.H.S. इति सिद्धम

3. **सिद्ध कीजिए -** $\sqrt{\frac{\mathbf{1+\sin A}}{\mathbf{1-\sin A}}} = \mathbf{\sec A + \tan A}$

हल. L.H.S. $= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

हर का परिमेयकरण करने पर:-

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)} \times \frac{(1+\sin A)}{(1+\sin A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}} \quad \because (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{(1+\sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A + \tan A$

= R.H.S. इति सिद्धम

04. यदि $(\cos ec\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Ans. L.H.S. $= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2 = 1]$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \quad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} = R.H.S.$$

05. सिद्ध कीजिए कि-

$$(\sec A + \tan A)(1-\sin A) = \cos A$$

Ans. L.H.S.$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A)$

$$= \left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A) \quad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

$$= \frac{(1-\sin^2 A)}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A} = \cos A = R.H.S.$$

06. सिद्ध कीजिए-

$$(\cos ecA - \sin A)(\sec A - CosA)(tanA + CotA) = 1$$

Ans. L.H.S.

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - sinA\right)\left(\frac{1}{cosA} - \cos A\right)\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{cosA}{\sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{CosA}\right)\left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin^2 A}{CosA}\right)\left(\frac{1}{\sin A \cos A}\right)$$

$= 1$

$=$ R.H.S.

9 त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), निबंध प्रश्न - 1, अंक (4), कुल अंक = 5

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. **उन्नयन कोण बनता है:-**

(1) दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के नीचे, क्षैतिज स्तर से नीचे

(2) दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच, क्षैतिज स्तर से ऊपर

(3) दोनों ही स्थितियों में

(4) इनमें से कोई नहीं (2)

2. **20 मी. लम्बी एक रस्सी एक उर्ध्वाधर खम्भें के शिखर तक पहुँचती है। यदि यह रस्सी खम्भे के साथ 30^0 का कोण बनाती है। तो खम्भे की ऊ. है:-**

(1) 10 मी. (2) $10\sqrt{3}$ मी.

(3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ मी. (4) 40 मी. (2)

3. **एक $\sqrt{3}h$ मी. ऊँची दीवार की छाया h मी. लम्बी है तो सूर्य का उन्नतांश कोण ज्ञात कीजिए?**

(1) 15^0 (2) 45^0

(3) 30^0 (4) 60^0 (4)

4. **एक 100 मी. ऊँची मीनार का शिखर भूमि के किसी बिन्दू से 45^0 का कोण बनाता है। मीनार के पाद बिन्दु से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए?**

(1) 200 मी. (2) 100 मी.

(3) 50 मी. (4) $100\sqrt{2}$ मी. (2)

5. **एक नदी के ऊपर एक पुल नदी के तट के साथ 45^0 का कोण बनाता है। यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 100 मीटर हो तो नदी की चौड़ाई होगी: -**

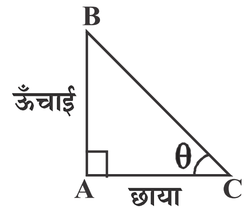
(a) 150 मीटर (b) $75\sqrt{2}$ मीटर

(c) $50\sqrt{2}$ मीटर (d) $100\sqrt{2}$ मीटर (3)

◈ लघुत्तरात्मक/निबंधात्मक प्रश्न -

1. **किसी मीनार की छाया उसकी ऊँचाई के बराबर हो तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-**

हल. दिया गया हैं:-



AB=AC

$\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{AB}{AC}$

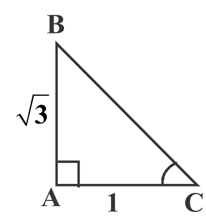
$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^0$

$\Rightarrow \theta = 45^0$

2. **यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊँचाई की $\frac{1}{\sqrt{3}}$ गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-**

हल. $\tan\theta = \frac{L}{A}$



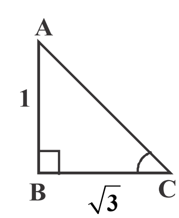
$= \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$= \tan\theta = \tan 60^0$

$= \theta = 60^0$

3. **एक ऊर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात 1: $\sqrt{3}$ है, तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-**

हल. $\tan\theta = \frac{L}{A}$



$= \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

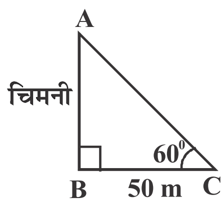
$\Rightarrow \tan\theta = \tan 30^0$

$\Rightarrow \theta = 30^0$

4. सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि (0^0 से 90^0 तक) होने से किसी स्तम्भ की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन होता है?

हल. परछाई की लम्बाई कम होती जाएगी।

5. एक चिमनी के आधार से 50 मीटर दूरी पर से उसके शिखर का उन्नयन कोण 60^0 है तो चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए-



हल. माना चिमनी की ऊँ. = h m

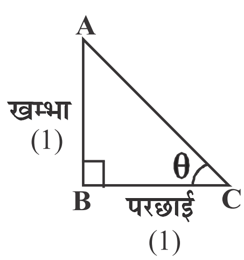
$$\tan 60^0 = \frac{h}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{50}$$

$$\Rightarrow h = 50\sqrt{3}$$

अतः चिमनी की ऊँ.= $50\sqrt{3}$ m

6. किसी समय एक खम्भे की ऊँचाई व परछाई की लम्बाई समान है तो सूर्य का उन्नयन कोण लिखिए:-



हल. माना सूर्य का उन्नवंश कोण= θ

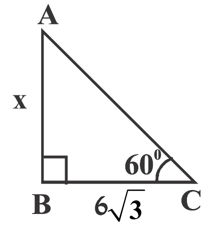
$$\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^0$$

$$\Rightarrow \theta = 45^0$$

7. चित्र के अनुसार x का मान लिखिए:-



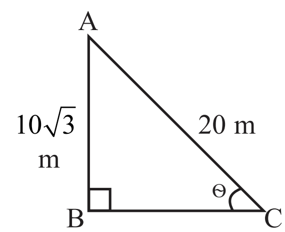
हल. $\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{L}{A}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = 6\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 18$$

8. दी गई आकृति में कोण θ का मान ज्ञात कीजिए:-



हल. $\sin\theta = \frac{L}{K}$

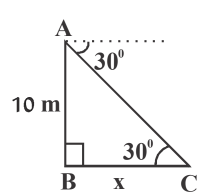
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sin 60^0$$

$$\Rightarrow \theta = 60^0$$

9. 10m ऊँची एक मिनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दू का अवनमन कोण 30^0 है। बिन्दू की मीनार के आधार से दूरी ज्ञात कीजिए।



हल. माना मीनार के आधार

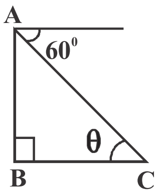
से बिन्दू की दुरी = x m

$$\Rightarrow \tan 30^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$$

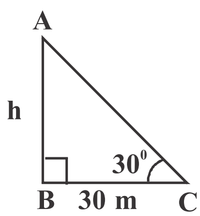
$$\Rightarrow x = 10\sqrt{3}m$$

10. निम्न चित्र में उन्नयन कोण θ ज्ञात कीजिए:-



हल. $\theta = 60^0$

11. Öêç× · ë° · ¤çÕÎ ÿæ ¸ÔÁ×æ ¹èÜæ¥ ÌÔÁæ- çÕÎ ÿæ **30** मी. की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयंन कोण **30°** **है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए-**



हल. माना मीनार की ऊँ. = h मीटर

$$\therefore \tan 30^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

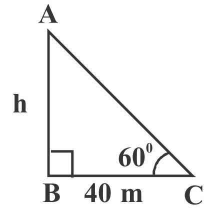
$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 30$$

$$\Rightarrow h = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}m$$

12. एक स्तम्भ के आधार से 40 मीटर दूर स्थित बिन्दू से स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 60° है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना स्तम्भ की ऊँ. = h m

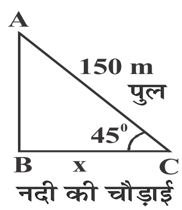
$$\therefore \tan 60^0 = \frac{h}{40}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{40}$$

$$\Rightarrow h = 40\sqrt{3}m$$

अत: स्तम्भ की ऊँ. $= 40\sqrt{3}m$

13. एक नदी के ऊपर पुल नदी के किनारे के साथ 45° का कोण बनाता है, यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 150 मीटर हो तब नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए:-



हल. माना नदी की चौड़ाई = x m

$$\therefore \cos 45^0 = \frac{A}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{150}$$

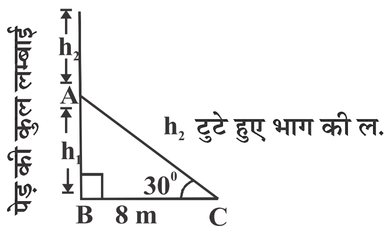
$$\Rightarrow x = \frac{150 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{150\sqrt{2}}{2} = 75\sqrt{2}$$

अत: नदी की चौड़ाई $= 75\sqrt{2}m$

14. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छुने

लगता है और इसके साथ 30^0 का कोण बनाता है। पेड़ के पाद बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छुता है, 8m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना पेड़ की कुल ल. = (h_1+h_2)m

Δ ABC में:-

$$\tan 30^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_1}{8}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{8}{\sqrt{3}} ....(i)$$

पुनः $\cos 30^0 = \frac{A}{K}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{h_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times h_2 = 16 \quad \Rightarrow h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

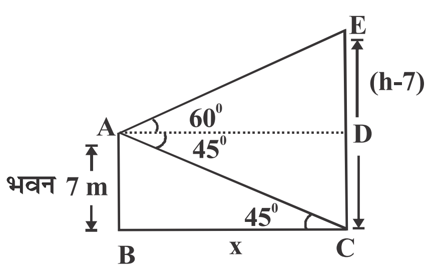
अतः पेड़ की कुल ऊँ. $= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$= 8\sqrt{3}\text{m.}$$

15. 7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60^0 है और इसके पाद का अवनमन कोण 45^0 है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना टावर की ऊँचाई = h m.

Δ ABC में :-

$$\tan 45^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{7}{x}$$

$$\Rightarrow x = 7.............(i)$$

पुनः Δ ADE में:-

$$\tan 60^0 = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{(h-7)}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x = h - 7.............(ii)$$

समी. (i) व (ii) से :-

$$\Rightarrow 7\sqrt{3} = h - 7$$

$$\Rightarrow h = 7\sqrt{3} + 7$$

$$\Rightarrow h = 7(\sqrt{3}+1)\text{m}$$

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नः-

1. **एक 80 मी. चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए है। इन दोनों खम्भो के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60^0 और 30^0 है। खम्भों की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

2. **एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मी. अधिक लम्बी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण 60^0 से घटकर 30^0 हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।**

3. **सुमद्र तल से 75 मीटर ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनयन कोण 45^0 और 60^0 है। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।**

10

वृत

बहुविकल्प प्रश्न - 2 , अंक (2), अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (1)
रिक्त स्थान प्रश्न- 1 अंक (1) , लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2) , कुल अंक = 6

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

1. एक वृत्त पर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

(1) 1 (2) 0

(3) 2 (4) अनन्त (1)

2. एक वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है?

(1) 1 (2) 2

(3) अनन्त (4) 0 (2)

3. एक वृत्त पर कुल कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है?

(1) 1 (2) अनन्त

(3) 2 (4) 0 (2)

4. यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाऐं परस्पर 80^0 के कोण पर झुकी हो तो $\angle AOB$ का मान कितना होगा?

(1) 80^0 (2) 180^0

(3) 100^0 (4) 90^0 (3)

5. 5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ=12 सेमी. तो PQ की लम्बाई होगी?

(1) 12 सेमी. (2) 113 सेमी.

(3) $\sqrt{119}$ सेमी. (4) 8.5 सेमी. (3)

6. एक बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 सेमी. तथा बिन्दु P की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या होगी?

(1) 7 सेमी. (2) 15 सेमी.

(3) 12 सेमी. (4) 24.5 सेमी. (1)

7. किसी वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं परस्पर होती है?

(1) लंबवत (2) समान्तर

(3) प्रतिच्छेदी (4) इनमे से कोई नहीं (2)

8. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है?

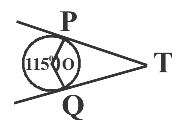
(1) 1 (2) 2

(3) 0 (4) अनन्त (3)

9. किसी वृत्त की त्रिज्या और उस पर खीचीं गई स्पर्श रेखा के मध्य कितने डिग्री का कोण होता है?

(1) 180^0 (2) 0^0

(3) 90^0 (4) 360^0 (3)

10. 

आकृति में TP, TQ केन्द्र O वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाऐं इस प्रकार है कि $\angle POQ=115^0$ तो $\angle PTQ$ बराबर है?

(1) 115^0 (2) 55^0

(3) 45^0 (4) 65^0 (4)

रिक्त स्थान

1. किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे .... बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

2. वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को .... कहते है।

3. एक वृत्त की .... समान्तर स्पर्श रेखाएं हो सकती है।

4. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को .... कहते है।

5. वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर............होती है।

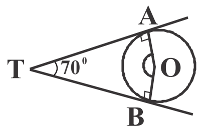
Ans. (1) एक (2) छेदक रेखा (3) दो (4) स्पर्श बिन्दु (5) लम्ब

6. बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयां .... होती है।

उत्तर - बराबर

◈ अतिलघुतरात्मक प्रश्न -

1. यदि एक बिन्दु T से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर TA व TB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 70^0 के कोण पर छुकी होतो $\angle$AOB ज्ञात कीजिए।

हल. 

चित्रानुसार, O केन्द्र वाले वृत पर TA व TB परस्पर स्पर्श रेखाऐं हैं, तथा $\angle TAO = TBO = 90^0$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंबवत होती है।)

$\angle ATB = 70^0$

$\therefore \angle TAO + \angle TBO + \angle ATB + \angle AOB = 360^0$

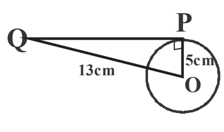
$90^0 + 90^0 + 70^0 + AOB = 360^0$

$250^0 + AOB = 360^0$

$AOB = 360^0 - 250^0$

$AOB = 110^0$

2. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा के बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ=13 सेमी, तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए

हल. 

OQ = 13cm

तथा त्रिज्या OP = 5cm

तथा $\angle OPQ = 90^0$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लेम्बवत)

अतः समकोण त्रिभुज OPQ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$OQ^2 = PQ^2 + OP^2$

$13^2 = PQ^2 + 5^2$

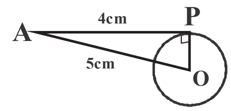
$169 = PQ^2 + 25$

$PQ^2 = 169 - 25$

$PQ = \sqrt{144}$

PQ = 12cm

3. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 सेमी है तो वृत की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल. 

चित्रानुसार, OA = 5 cm

तथा स्पर्श रेखा AP = 4 cm

तथा $APO = 90^0$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंबवत)

अतः समकोण त्रिभुज AOP में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$OA^2 = AP^2 + OP^2$

$5^2 = 4^2 + OP^2$

$25 = 16 + OP^2$

$\Rightarrow OP^2 = 25 - 16$

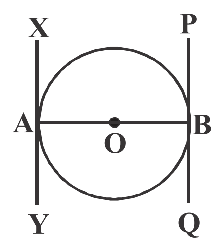
$OP = \sqrt{9}$

OP = 3 cm

अतः त्रिज्या OP = 3cm

लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. सिद्ध करों कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं समांतर होती हैं?



दिया है:-

$\because$ एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा व्यास AB है। तथा XY, PQ स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है:- XY || PQ

हल. $\because$ OA त्रिज्या तथा XY स्पर्श रेखाऐं है

$\angle OAX = 90^0$ ($\because$ त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंबवत होती)

तथा इसी प्रकार,

OB त्रिज्या तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OBQ = 90^0$

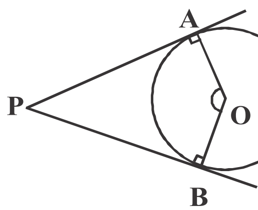
$\therefore \angle OAX = \angle OBQ = 90^0$

परंतु यहां समान्तर रेखा के एकांतर कोण है।

जब एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

अतः XY || PQ

2. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा PA व PB स्पर्श रेखाऐं हैं तो सिद्ध करो कि AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है?



दिया है :- O वृत का केन्द्र है तथा AP, PB स्पर्श रेखा हैं।

सिद्ध करना है:- AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हल. $\because$ PA, PB स्पर्श रेखा एवं OA, OB वृत की त्रिज्या है।

$\therefore \angle OAP = 90^0$ तथा $OBP = 90^0$

$\because \angle OAP + \angle OBP + \angle AOB + \angle APB = 360^0$ (चतुर्भुज के चारों कोणों का योग)

$90^0 + 90^0 + \angle AOB + \angle APB = 360^0$

$\angle AOB + \angle APB = 360^0 - 180^0$

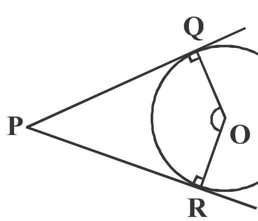
$\angle AOB + \angle APB = 180^0$

यहाँ सम्मुख कोणों का योग संपूरक है।

अतः चतुर्भुज AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

3. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत पर खींचीं गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अंतरिक कोण का संपूरक होता है?

हल.



दिया है:- एक वृत जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत पर स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle ROQ + \angle QPR = 180$

उपपति :- वृत में OQ त्रिज्या है तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OQP = 90^0$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्बवत होती है।)

इसी प्रकार

$\angle ORP = 90^0$

चतुर्भुज PQOR में,

$\angle RPQ + \angle QOR + \angle OQP + \angle ORP = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR + 90^0 + 90^0 = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR + 180^0 = 360^0$

$\angle RPQ + \angle QOR = 360^0 - 180^0$

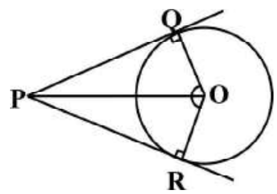
$\angle RPQ + \angle QOR = 180^0$

$\angle ROQ + \angle QPR = 180^0$

अतः $\angle ROQ + \angle QPR = 180^0$

4. सिद्ध कीजिए कि बाह्य बिन्दु से वृत पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाईयां बराबर होती है?

हल.



दिया है:- एक वृत जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत्त पर स्पर्श रेखाऐं हैं।

सिद्ध करना है :- PQ = PR

रचना:- OP, OQ, OR को मिलाया

उपपति (हल):-

$\because$ स्पर्श रेखा, वृत्त की त्रिज्या पर लंबवत होती है।

$\therefore \angle OQP = \angle ORP = 90^0$

अब ΔPQO व ΔPRO में

$\angle OQP = \angle ORP$ (प्रत्येक 90^0)

OP = OP (उभयनिष्ठ भुजा)

OQ = OR (वृत्त की त्रिज्याऐं)

अतः R.H.S.सर्वांगसमता नियम से,

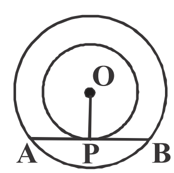
$\Delta PQO \cong \Delta PRO$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाऐं समान होती हैं।

भुजा PQ = भुजा PR

5. सिद्ध करो कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत की जीवा जो छोटे वृत को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है?

हल.



❖❖❖

दिया है:- O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं

बड़े वृत्त की जीवा AB जो छोटे वृत को बिन्दु P पर स्पर्श करती है

सिद्ध करना है:- AP = BP

रचना :- OP को मिलाया।

उपपति :- AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा OP त्रिज्या है।

$\therefore OP \perp AB$

अत: OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है। अर्थात - AP = BP

11 वृतो से संबधित क्षेत्रफल

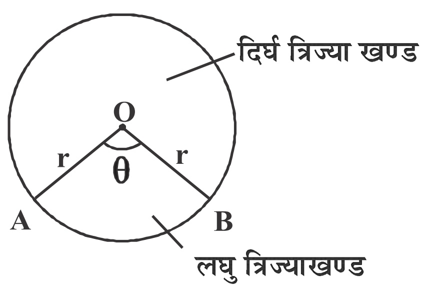
बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), अतिलघुउत्तरात्मक - 2 (2 अंक)

लघुउत्तरात्मक - 1 (2 अंक) कुल अंक = 5

- **वृत की परिधि = $2\pi r$**
- **अर्द्ध वृत की परिधि / परिमाप = πr**
- **वृत का क्षेत्रफल = πr^2**
- **वृत के चतुर्थांश की परिधि** $= \frac{2\pi r}{4} + 2r$

  $= \frac{\pi r + 4r}{2}$
- **अर्द्ध वृत का क्षेत्र** $= \frac{\pi r^2}{2}$

  जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$ अथवा 3.14 (लगाया) व r = वृत की त्रिज्या
- **वृत का त्रिज्य खण्ड :-** किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्य खण्ड कहते है।

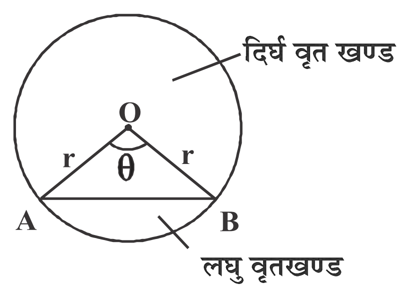


- लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल (A) = $\frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$
- दिर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{(360^0 - \theta)}{360^0} \times \pi r^2$

  जहाँ θ चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण, r वृत की त्रिज्या
- संगत चाप की लम्बाई (L) $= \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r$
- जब चाप की लम्बाई ज्ञात हो तो त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

  $= \frac{1}{2}$ × चाप की लम्बाई × त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times l \times r$

  Note:- यह चाप की लम्बाई व त्रिज्य खण्ड के क्षेत्रफल में संबंध को दर्शाता है।
- **वृत खण्ड:-** वृत की जीवा वृत को दो भागों में विभाजित करती हैं। इसमें बड़े भाग को दिर्घवृत खण्ड व छोटे भाग को लघु वृत खण्ड कहते है।



- लघु वृत खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$
- दिर्घ वृत खण्ड का क्षेत्रफल = वृत का क्षत्रे. - लघु वृतखण्ड का क्षेत्र. $= \pi r^2 - \left[\frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta\right]$

  जहाँ r = वृत की त्रिज्या, θ = चाप द्वारा वृत के केन्द्र पर बना कोण

कुछ महत्वपूर्ण बिन्दू:-

- **लघु चाप का डिग्री माप 180^0 से कम होता है।**
- **दीर्घ चाप का डिग्री माप 180^0 से अधिक होता है।**
- **वृत के प्रत्येक चतुर्थांश के कोण का डिग्री मान 90^0 होता है।**
- **घड़ी के मिनट की सूई 1 मीनट में 6^0 का कोण बनाती है।**
- **π एक अपरिमेय संख्या होती है।**

1. **त्रिज्या R वाले वृत के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण P^0 है, निम्नलिखित है** $= \frac{P^o}{360^o} \times \pi R^2$

❖ वृत के अनुदिश एक चक्कर में तय दूरी को वृत की परिधि कहते है।

❖ वृत के केन्द्र पर बना कोण चार समकोण (360^0) के बराबर होता है।

❖ दिर्घ त्रिज्य खण्ड का कोण =(360^0- लघु त्रिज्या खण्ड का कोण)

◈ बहुविकल्प प्रश्न -

प्र. 1. वृत्त की त्रिज्या 14cm है, और त्रिज्यखण्ड का कोण 90° है तो वृत्त के चाप की लम्बाई ज्ञात करो -

(1) 22 cm (2) 44 cm
(3) 88 cm (4) 616 cm (1)

प्र. 2. किसी वृत के त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल 77 वर्ग सेमी है, यदि उस वृत की त्रिज्या 7cm हो तब त्रिज्य खण्ड के चाप की लम्बाई होगी-

(अ) 11cm (ब) 22cm
(स) 15cm (द) 9cm (ब)

प्र. 3. एक वृत की परिधि 44 सेमी है, तो उस वृत की त्रिज्या होगी-

(अ) 7cm (ब) 14cm
(स) 22cm (द) 28cm (अ)

प्र. 4. यदि वृत के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल, वृत के क्षेत्रफल का $\frac{1}{12}$ वां भाग हो तो त्रिज्य खण्ड का कोण होगा-

(अ) 20^0 (ब) 30^0
(स) 40^0 (द) 50^0 (ब)

प्र. 5. यदि वृत के लघुत्रिज्य खण्ड का कोण 250^0 हो तो दिर्घ त्रिज्य खण्ड का कोण होगा-

(अ) 250^0 (ब) 110^0
(स) 80^0 (द) 360^0 (ब)

(संकेत 360^0 - 250^0 =110^0)

प्र. 6. यदि दो वृतो की त्रिज्याएं r_1 व r_2 है तो इन दोनो वृतो की परीधि के योग के समतुल्य परिधि के वृत की त्रिज्या r का मान होगा-

(अ) $r = r_1 + r_2$ (ब) $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$
(स) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ (द) $r = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$ (अ)

प्र. 7. यदि एक वृत का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है तो वृत की त्रिज्या होगी-

(अ) 2 मात्रक (ब) $\sqrt{2}$ मात्रक
(स) 3 मात्रक (द) 1 मात्रक (अ)

[संकेत $\pi r^2 = 2\pi r \Rightarrow [r = 2$ मात्रक]]

प्र. 8. 14 सेमी व्यास वाले एक पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गयी दूरी होगी-

(अ) 122 सेमी (ब) 44 सेमी
(स) 54 सेमी (द) 84cm (ब)

प्र. 9. घड़ी के मीनट की सूई द्वारा 20 मीनट में केन्द्र पर आन्तरित कोण का मान ज्ञात किजिए-

(अ) 60^0 (ब) 40^0
(स) 20^0 (द) 120^0 (द)

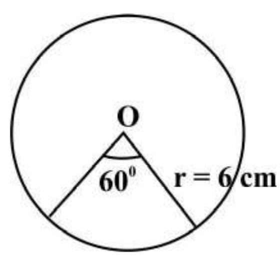
प्र. 10. उस त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके चाप की लम्बाई (L) = 10 सेमी और त्रिज्य (r) = 6 सेमी है-

(अ) $40cm^2$ (ब) $160cm^2$
(स) $30cm^2$ (द) $80cm^2$ (स)

◈ अति लघुउत्तरात्मक प्रश्नः-

1. **6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत के लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसका कोण 60^0 है।**

हलः-



केन्द्र का कोण $\theta = 60^0$

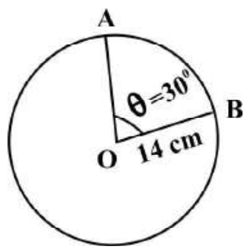
त्रिज्या (r) = 6cm

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360^0}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60^0}{360^0} = \frac{132}{7} = 18.86 cm^2$

2. एक घड़ी के मिनट की सूई जिसकी लम्बाई 14cm है। इस सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात करो-

हल:-



घड़ी के मिनट की सूई द्वारा 1 मीनट में बनाया गया कोण = 6^0

अत: 5 मीनट में रचित कोण $=6^0 \times 5 = 30^0$

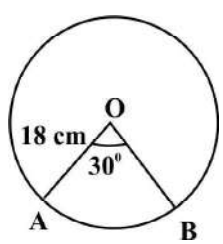
$\theta = 30^0$

सूई की लम्बाई = (r) = 14cm

सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$

$= \frac{30^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = \frac{154}{3} cm^2$

3. चित्र में वृत का केन्द्र 0 है। वृत की त्रिज्या 18 सेमी है तथा $\angle AOB$ =30° तो चाप AB की लम्बाई है-



हल:- यहाँ r =18cm व $\theta = 30^0$

चाप की लम्बाई $= \frac{2\pi r\theta}{360^0} = \frac{\pi r\theta}{180^0} = \frac{22}{7} \times \frac{18 \times 30}{180^0} = \frac{66}{7}$ सेमी^{2}

4. 15 cm त्रिज्या वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात करो-

(i) चाप की लम्बाई (ii) संगत लघु व दिर्घ त्रिज्य खण्डों का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$ व $\sqrt{3} = 1.73$)

हल:- वृत की त्रिज्या (r) = 15cm

चाप द्वारा केन्द्र पर आंतरित कोण (θ) = 60^0

(i) संगत चाप की लम्बाई $(L) = \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r$

$= \frac{60^0}{360^0} \times 2 \times 3.14 \times 15 = 15.7 cm$

(ii) लघु त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 = \frac{60^0}{360^0} \times 3.14 \times 15 \times 15 = \frac{706.5}{6} = 117.75$ सेमी.^{2}

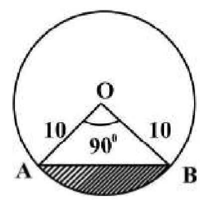
दीर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$= \frac{360^0 - \theta}{360^0} \times \pi r^2 = \frac{360^0 - 60^0}{360^0} \times 3.14 \times 15 \times 15 = \frac{300^0}{360^0} \times 3.14 \times 15 \times 15$

$= \frac{3532.5}{6} = 588.75$ सेमी^{2}

5. 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण आंतरित करती है। संगत लघु वृत खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-



वृत की त्रिज्या (r) = 10cm

केन्द्र पर बना कोण (θ) = 90^0

संगत लघु वृत खण्ड को क्षे. $= \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} - \frac{r^2}{2} \sin\theta$

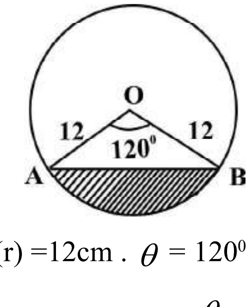
$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90^0}{360^0} - \frac{10 \times 10}{2} \sin 90^0$

$= \frac{314}{4} - 50 \times 1$ $\{\sin 90^0 = 1\}$

$= 78.5 - 50 = 28.5 cm^2$

6. त्रिज्या 12 सेमी वाले वृत की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है संगत लघु वृत खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो। $\{\pi = 3.14\}$

हल:-



त्रिज्या (r) =12cm . $\theta = 120^0$

लघु वृत खण्ड का क्षे. $= \frac{\theta}{360^0} \pi r^2 - \frac{r^2}{2} \sin\theta$

$$=\frac{120^0}{360^0}\times 3.14\times 12\times 12-\frac{12\times 12}{2}\sin 120^0$$

$$=\frac{3.14\times 12\times 12}{3}-\frac{144}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\text{जहाँ}\sin 120^0=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=\frac{3.14\times 12\times 12}{3}-36\times 1.73\ \{\sqrt{3}=1.73\}$$

$=150.72-62.28=88.44$ सेमी^{2}

प्र.07 त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाईं ज्ञात कीजिए जिसके केन्द्र पर बना कोण P° है-

हल: चाप की लम्बाईं (L) = $\frac{P°}{360°}\times\pi r^2$

प्र.08 एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 सेमी^{2} है तो उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो -

हल: वृत्त का क्षेत्रफल = 616

$$\pi r^2=616$$

$$r^2=\frac{616}{\pi}$$

$$r^2=\frac{616}{\frac{22}{7}}$$

$$r^2=\frac{616\times 7}{22}$$

$$r^2=196$$

$\therefore$ त्रिज्या (r) = 14 cm

◈ लघुत्तरात्मक प्रश्नः-

प्र.1. किसी कार के दो वाइपर परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते है। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 cm है। और 115^0 के कोण तक घूम कर सफाई कर सकती है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात करो?

हल:- पत्ति की लम्बाई (r) = 25cm

त्रिज्या खण्ड का कोण (θ) = 115^0

वाइपर त्रिज्यखण्ड के रूप में घुमता है।

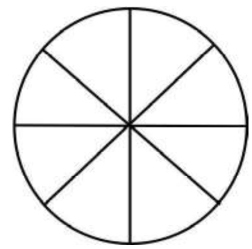
त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = एक पत्ति द्वारा घूमा गया क्षेत्रफल

$$=\frac{\pi r^2\theta}{360^0}=\frac{22}{7}\times\frac{25\times 25\times 115^0}{360^0}$$

अतः वाइपर को दो पत्तियों द्वारा घुमा गया क्षेत्रफल

$$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{25\times 25\times 115^0}{360^0}=1255cm^2$$

प्र.2. एक छत्तरी में आठ ताने है, जो बराबर दूरी पर है। छतरी को 45cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत मानते हुए इसके दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो?



हल:- प्रश्नानुसार, वृत की त्रिज्या (r) = 45cm

तानों की संख्या =8

केन्द्रिय कोण $\theta=\frac{360^0}{8}=45^0$

दो क्रमागत तानो के बीच का क्षे. $=\frac{\pi r^2\theta}{360^0}=\frac{22}{7}\times\frac{45\times 45\times 45^0}{360^0}$

$$=\frac{11\times 45\times 45}{7\times 4}=\frac{22275}{28}cm^2$$

प्र.3. 15 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूटें से एक घोड़े को 5 मीटर लम्बी रस्सी से बाँधा गया है। मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।

हल:- रस्सी की लम्बाई (r) = 5 मीटर

केन्द्रीय कोण (θ) = 90^0 (वर्ग का प्रत्येक कोण = 90^0)

घोड़े के घास चर सकने वाले भाग का क्षे. $=\frac{\pi r^2\theta}{360^0}$

$=\frac{22}{7}\times\frac{5\times 5\times 90^0}{360^0}=\frac{11\times 25}{7\times 2}=19.64$ मीटर^2

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नः-

1. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के निचे स्थित चट्टानों को चेतावनी देने के लिए एक लाइट हाउस 80^0 कोण वाले एक त्रिज्यखण्ड में 16.5 कि.मी. की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो जहां तक जहाजों को चेतावनी दी जा सके? [$\pi=3.14$]

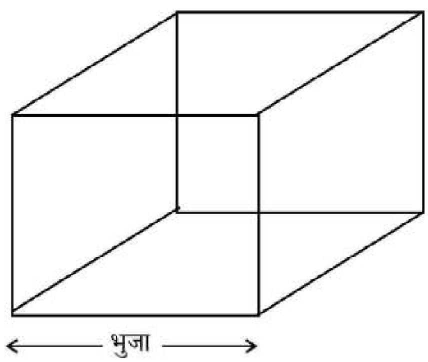
2. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60^0 का कोण आंतरित करता है, तो संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो?
3. एक चाप केन्द्र पर 45^0 का कोण आन्तरित करता है। यदि इसके लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल 77 cm^2 है, तो वृत की त्रिज्या ज्ञात करो।
4. एक वृत की त्रिज्या 3.5 सेमी है तो वृत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
5. एक वृत की परिधि ज्ञात करो यदि वृत की त्रिज्या 28 सेमी है।

12 पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन

बहुविकल्प प्रश्न -2 , अंक (2),

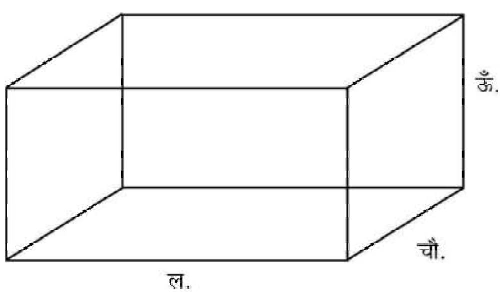
निबंधात्मक प्रश्न - 1 (4 अंक) कुल अंक = 6

(1) घन-



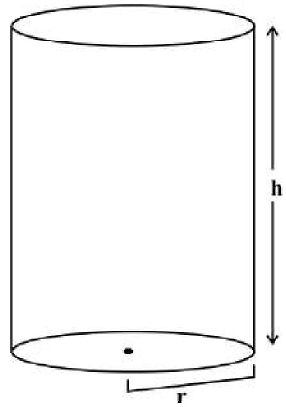
- ❖ फलक = 6, किनारे = 12, शीर्ष = 8
- ❖ घन का क्षेत्रफल =6×भुजा^{2}
- ❖ घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षे.=4×भुजा^{2}
- ❖ घन के विकर्ण की लम्बाई= $\sqrt{3}\times$ भुजा
- ❖ घन का आयतन=भुजा^{3}

(2) घनाभ:-



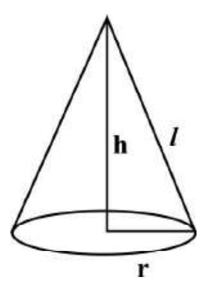
- ❖ घनाभ का क्षे.=2 (ल.×चौ+चौ.×ऊँ+ऊँ×ल.)
- ❖ घनाभ का पार्श्वपृष्ठीय क्षेत्रफल/कमरे की चारो दीवारो का क्षे.=2×ऊँचाई(ल.+चौ.)
- ❖ घनाभ के आधार का क्षे.=ल.×चौ.
- ❖ घनाभ का आयतन =ल.×चौ.×ऊ.
- ❖ घनाभ के विकर्ण की ल.= $\sqrt{(\text{ल.})^2+(\text{चौ.})^2+(\text{ऊ.})^2}$

(3) बेलन:-



- ❖ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षे.= $2\pi rh$
- ❖ बेलन के आधार का क्षे. = πr^2
- ❖ बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे. = $2\pi r(r+h)$
- ❖ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$
- ❖ खोखले बेलन में दोनों सिरे खुले होते है। ठोस बेलन में दोनों सिरे बन्द होते है।

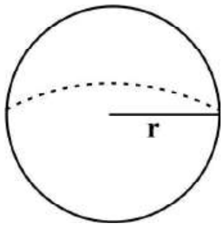
(5) शंकु :-



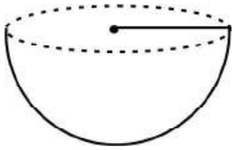
- ❖ शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षे.= πrl
- ❖ शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे.= $\pi r(r+l)$
- ❖ शंकु के आधार का क्षे.= πr^2
- ❖ शंकु की तिर्यक ऊचाई $l=\sqrt{r^2+h^2}$
- ❖ शंकु का आयतन $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

(6) गोला:- वृत या अर्द्ध वृत के व्यास को अक्ष मानकर उसके

चारों और चककर लगाने पर जो ठोस बनता है। उसे गोला कहते है।



- ❖ गोले का पृष्ठीय क्षे.$=4\pi r^2$
- ❖ गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$



- ❖ अर्द्धगोले का वक्र पृ.क्षे.$=2\pi r^2$
- ❖ अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृ.क्षे.$=3\pi r^2$
- ❖ अर्द्ध गोले का आयतन$=\frac{2}{3}\pi r^3$
- ❖ व्यास=2×त्रिज्या [d=2r]
- ❖ 1 लीटर = 1000 घन सेमी
- ❖ 1 घन मीटर = 1000 लीटर
- ❖ 1 मीटर = 100 सेमी
- ❖ क्षेत्रफल को वर्ग इकाई व आयतन को घन इकाई में मापा जाता है।
- ❖ किसी ठोस द्वारा आकाश में जितना स्थान घेरा जाता है। वह उसका आयतन कहलाता है।
- ❖ घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला, अर्द्धगोला त्रिविमिय आकृतिया है।

◈ बहुविकल्प प्रश्नः-

प्र. 1. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 मी.^{2} है। घन की भुजा होगी ?

(अ) 6.5 मीटर (ब) 13 मीटर

(स) 26 मीटर (द) 169 मीटर (ब)

हल- घन का सम्पूर्ण क्षे.=1014

6×भुजा^{2}=1014

भुजा$^2=\frac{1014}{6}$

भुजा^{2}=169

भुजा=13 मीटर

प्र. 2. एक गोले का व्यास 6 सेमी है। गोले का आयतन होगा।?

(अ) 16π घन सेमी (ब) 20π घन सेमी

(स) 36π घन सेमी (द) 288π घन सेमी (स)

हल- $r=\frac{6}{2}=3$

गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times3\times3\times3=36\pi cm^3$

प्र. 3. दो गोले की त्रिज्याएँ 1:2 में है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात होगा?

(अ) 1:2 (ब) 2:6

(स) 1:4 (द) 2:3 (स)

हल- $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=1:4$

प्र. 4. शंकू की त्रिज्या 6 सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी है। शंकू की तिर्यक ऊँचाई होगी?

(अ) 5 सेमी (ब) 6 सेमी

(स) 10 सेमी (द) 14 सेमी (स)

हल- $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ सेमी

प्र. 5. भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्द्ध गोला रखा है। अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास होगा?

(अ) 7 cm (ब) 14 cm

(स) 21 cm (द) 28 cm (अ)

हल- (अर्द्ध गोले का व्यास =घन की भुजा)

प्र. 6. एक ठोस एक अर्द्ध गोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है। जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm है। तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के समान है। ठोस का आयतन होगा ?

(अ) πcm^3 (ब) $2\pi cm^3$

(स) $3\pi cm^3$ (द) $3\pi cm^3$ (अ)

हल- ठोस का आ.=अर्द्धगोले का आ.+शंकु का आ.

$=\frac{2}{3}\pi 1^3+\frac{1}{3}\pi 1^2\times1$

$=\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{3\pi}{3}=\pi cm^3$

प्र. 7. यदि एक बेलन की ऊँचाई 11 cm तथा उसका वक्र पृ.क्षे.968 सेमी^{2} है। तो बेलन की त्रिज्या होगी?

(अ) 10 सेमी (ब) 11 सेमी

(स) 12 सेमी (द) 14 सेमी (द)

हल- बेलन का वक्र पृ. क्षे.=968

$$2\pi rh = 968$$

$$r = \frac{968}{2\pi h} = \frac{968\times7}{2\times22\times11} = \frac{968\times7}{484} = 2\times7 = 14cm$$

प्र. 8. एक कमरे की ल.,चौ. और ऊँ. क्रमश: 6 मी., 4 मी. और 3 मी. है। कमरे की चारों दिवारों का क्षेत्रफल होगा ?

(अ) 60 मी.^{2} (ब) 72 मी.^{2}

(स) 84 मी.^{2} (द) 128 मी.^{2} (अ)

हल- चारो दिवारों का क्षे.=2 (ल.+चौ.)×ऊँ.

=2(6+4)×3

=2×(10)×3=60 मी.^{2}

प्र. 9. एक ठोस अर्द्ध गोले की त्रिज्या 7 सेमी है। तो इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा ?

(अ) 336 सेमी^{2} (ब) 462 सेमी^{2}

(स) 256 सेमी^{2} (द) 149 सेमी^{2} (ब)

हल- $S = 3\pi r^2 = 3\times\frac{22}{7}\times7\times7 = 462$ सेमी^{2}

प्र. 10. एक घन का आयतन ज्ञात कीजिए यदि घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 384 सेमी^{2} है?

(अ) 8 सेमी^{3} (ब) 32 सेमी^{3}

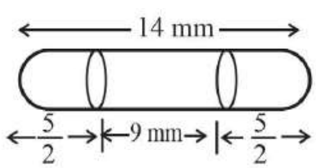
(स) 64 सेमी^{3} (द) 512 सेमी^{3} (द)

हल- घन का क्षे. =384

$6a^2 = 384 \Rightarrow a^2 = \frac{384}{6} = 64 \Rightarrow a = 8, V = a^3 = 8^3 = 512$ सेमी^{3}

निम्बन्धात्मक प्रश्न

01. दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है। जिसके दोनों सिरों पर एक एक अर्द्धगोला हुआ है। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है। और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-



हल- यहाँ बेलन का व्यास = अर्द्ध गोले का व्यास = 5mm

बेलन का त्रिज्या = अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r) = \frac{5}{2}mm$

कैप्सूल की सम्पूर्ण लम्बाई = 14 mm

बेलनाकार भाग की ऊचाई$(h) = 14 - \left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right) = 14 - 5 = 9mm$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\times2\pi r^2$$
$$= 2\pi r(h+2r)$$
$$= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}\left[9+2\times\frac{5}{2}\right]$$
$$= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}[9+5]$$
$$= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}\times14$$
$$= 2\times22\times5$$
$$= 220 \quad mm^2$$

अत: कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 220 mm^2

02. ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेन्टीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

हल- बेलन का व्यास = शंकु का व्यास = 1.4 cm

बेलन की त्रिज्या = शंकु की त्रिज्या (r) = 0.7 cm

बेलन की ऊँचाई h = 2.4 cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{(0.7)^2+(2.4)^2}$

$$= \sqrt{0.49+5.76} = \sqrt{6.25} = 2.5cm$$

शेष ठोस का सम्पूर्ण क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन के आधार का क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi rl$$
$$= \pi r(2h+r+l)$$
$$= \frac{22}{7}\times0.7(2\times2.4+0.7+2.5)$$
$$= \frac{22}{7}\times\frac{7}{10}(4.8+3.2)$$
$$= \frac{22}{10}(8) = \frac{176}{10} = 17.6 \quad cm^2$$

अत: शेष ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 18cm^2

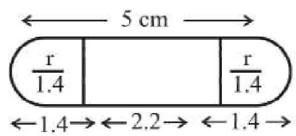
03. एक गुलाब जामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाब जामुनों में लगभग कितनी चाशनी होगी, यदि प्रत्येक गुलाब जामुन एक बेलन के आकार का है। जिसके दोनों सिरे अर्द्ध गोलाकार है। तथा उसकी लम्बाई 5 cm और व्यास 2.8 cm हैं।

हल- बेलन का व्यास = अर्द्ध गोले का व्यास = 2.8cm

बेलन की त्रिज्या = अर्द्ध गोले की त्रिज्या (r) = 1.4 cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = 5 - (1.4+1.4)

h = 5 - 2.8 = 2.2 cm



एक गुलाब जामुन का आयतन = बेलन का आयतन +2 अर्द्ध गोले का आयतन

$$= \pi r^2 h + 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \pi r^2 \left[h + \frac{4}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \left[2.2 + \frac{4}{3} \times 1.4\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{10} \times \frac{14}{10}\left[2.2 + \frac{5.6}{3}\right]$$

$$= \frac{22 \times 2 \times 14}{10 \times 10}[2.2 + 1.866]$$

$$= \frac{616}{100}[4.066]$$

$$= 6.16 \times 4.066$$

एक गुलाब जामुन का आयतन = 6.16 × 4.066 = 25.05cm³

45 गुलाब जामुन का आयतन = 45×25.05 = 1127.25 cm³

∵ चीनी की चाशनी का आयतन = 1127.25 का 30%

$$= 1127.25 \times \frac{30}{100}$$

$$= 338.17 cm^2$$

$$= 338 \quad cm^2 \text{ (लगभग)}$$

04. एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8 cm है। और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला है) की त्रिज्या 5 cm है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमें प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है। डाली जाती है। तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए-

हल- शंकु की त्रिज्या R = 5 cm

शंकु की ऊँचाई H = 8 cm

सीसे की प्रत्येक गोली की त्रिज्या r = 0.5 cm

$$\text{सीसे की गोलियों की संख्या} = \frac{\frac{1}{4}\text{(शंकु में पानी का आयतन)}}{\text{(सीसे की एक गोली का आयतन)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)}{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}$$

$$= \frac{3\pi R^2 H}{3 \times 4 \times 4\pi r^3}$$

$$= \frac{R^2 H}{16 r^3}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times 8}{16 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10}{16 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$= 10 \times 10 = 100$$

अतः बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या = 100

05. ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन अध्योरापित है। से लोहे का एक स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है, 1 cm³ लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 gm होता है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल- नीचे वाले बेलन का व्यास = 24 cm

त्रिज्या (R) = 12 cm

ऊँचाई (H) = 220 cm

ऊपर वाले बेलन की त्रिज्या r = 8 cm

ऊँचाई h = 60 cm

स्तम्भ का आयतन = नीचे वाले बेलन का आयतन + ऊपर वाले बेलन का आयतन

$$= \pi R^2 H + \pi r^2 h$$

$$= \pi (R^2 H + r^2 h)$$

$$= 3.14(12 \times 12 \times 220 + 8 \times 8 \times 60)$$

$$= 3.14(31680 + 3840) = 3.14 \times 35520 = 111532.8 cm^3$$

$111532.8\ cm^3$ का द्रव्यमान = 111532.8×8 gm

अतः स्तम्भ का द्रव्यमान = 892262.4 gm = 892.26 kg

06. एक गोलाकार काँच के बर्तन की, एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लम्बाई 8 cm है, और व्यास 2 cm है। जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाले वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लिजिए)

हल- बेलनाकार भाग का व्यास = 2 cm

त्रिज्या (r) = 1 cm

ऊँचाई (h) = 8 cm

गोलाकार भाग का व्यास = 8.5 cm

त्रिज्या (R) = 4.25 cm

बर्तन में पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi r^2 h$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3} R^3 + r^2 h\right]$$

$$= 3.14 \left[\frac{4}{3} \times 4.25 \times 4.25 \times 4.25 + 1 \times 1 \times 8\right]$$

$$= 3.14 \left[\frac{307.09}{3} + 8\right]$$

$$= 3.14[102.354 + 8]$$

$$= 3.14 \times 110.354$$

$$= 346.51\ cm^3$$

अतः बर्तन में पानी का आयतन = $346.51\ cm^3$

13 सांख्यिकी

बहुविकल्प प्रश्न - 2, अंक (2), अतिलघुउत्तरात्मक -2, अंक (2) लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2)
दीर्घउत्तरात्मक - 1, अंक (3), निबंधात्मक प्रश्न-1, अंक (4) कुल अंक = 13

❖ **केन्द्रीय प्रवृति:-** ''आँकड़ों में से किसी एक आँकड़े के पास जाने की प्रवृति को केन्द्रीय प्रवृति कहते हैं।'' केन्द्रीय प्रवृति के तीन माप है:

(1) माध्य/समान्तर माध्य /औसत- $\bar{x}$

(2) माध्यक/माध्यिका - M

(3) बहुलक - Z

(1) माध्य

(A) व्यक्तिगत श्रेणी से माध्य:- यदि किसी चर राशि के n मान क्रमश: $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ हो तो माध्य

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$\sum$ (सिग्मा) ग्रीक वर्णमाला का अक्षर है जो योग को दर्शाता है।

(B) अवर्गीकृत/वर्गीकृत श्रेणी से माध्य:- ज्ञात करने की तीन विधियाँ है जो निम्न है:

(i) प्रत्यक्ष विधि: माध्य $= \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$ यहाँ $\sum F = N =$ बारम्बारताओं का योग

(ii) कल्पित माध्य विधि: माध्य $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

यहाँ a = कल्पित माध्य

$d_i = x_i - a$

(iii) पग-विचलन विधि: माध्य $(\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

यहाँ a = कल्पित माध्य

h = वर्ग माप

$u = \frac{x_i - a}{h}$

Note: वर्गीकृत श्रेणी का माध्य निकालने के लिए सारणी में हमेशा मध्यमान (x_i) निकाला जाता है।

(2) माध्यक/माध्यिका(M): - माध्यक केन्द्रीय प्रवृति का ऐसा माप है जो आँकड़ो में सबसे बीच का मान देता है।

(A) व्यक्तिगत श्रेणी से माध्यक:- सर्वप्रथम दिये गये आंकड़ों का आरोही /अवरोही क्रम में लिखा जाता है। माना n आंकड़े हो तो

(i) जब n विषम हो - माध्यक (M) $= \frac{n+1}{2}$ वाँ पद

(ii) जब n सम हो - माध्यक (M) $= \frac{\frac{n}{2} \text{ वाँ पद} + \left(\frac{n+2}{2}\right) \text{ वाँ पद}}{2}$

B अवर्गीकृत श्रेणी से माध्यक:- सर्वप्रथम संचयी बारम्बारता (C.F.) ज्ञात करना। फिर $\frac{N}{2} = \frac{\sum F}{2}$ से ठीक बड़ी C.F. वाला चर मान माध्यक होगा।

(C) वर्गीकृत श्रेणी से माध्यक :- इसमें अवर्गीकृत श्रेणी के समान - माध्यक वर्ग प्राप्त होता है। $M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.\text{पूर्व}}{F\text{संगत}}\right) \times h$

यहाँ $l =$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा है।

h = वर्ग अन्तराल

N = बारम्बारताओं को योग

C.F.= माध्यक वर्ग के ठीक पूर्व वर्ग की संचय बारम्बारता

F = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

Note: अवर्गीकृत/वर्गीकृत श्रेणी से माध्यक ज्ञात करने के लिए सारणी में हमेशा C.F. निकाला जाता है।

(3) बहुलक (Z): दिए हुए प्रेक्षणों में प्रेक्षण का वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है अर्थात् उस प्रेक्षण में जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती हो, बहुलक कहलाता है।

(A) व्यक्तिगत श्रेणी से बहुलक:- सबसे ज्यादा बार आने वाली संख्या बहुलक होता है।

(B) अवर्गीकृत श्रेणी से बहुलक:- सबसे ज्यादा बारम्बारता के संगत चर का मान बहुलक होता है।

(C) वर्गीकृत श्रेणी से बहुलक:- सर्वप्रथम अधिकतम बारम्बारता के संगत बहुलक वर्ग ज्ञात करते है।

बहुलक (Z) $= l + \left(\frac{F_1 - F_o}{2F_1 - F_o - F_2}\right) \times h$

यहाँ $l =$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

h = वर्ग अंतराल की माप

F_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

F_o = बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व की बारम्बारता

F_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद की बारम्बारता

(i) परास (Range)= अधिकतम मान- न्यूनतम मान

(ii) वर्ग अन्तराल (h)= वर्ग की उच्च सीमा - वर्ग की निम्न सीमा

(iii) 3 माध्यक = बहुलक +2 माध्य (तीनों केन्द्रीय प्रवृति के मापकों में एक संबंध)

❖ बंटन कम प्रकार का है तो हमें वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ प्राप्त होती है।

❖ बंटन अधिक प्रकार का है तो हमें वर्ग अंतरालों की निम्न सीमाएँ प्राप्त होती है।

बहुविकल्पीय प्रश्न

01. बंटन 3, 3, 5, 3, 4, 2, 8, 4, 3, 4, 3 का बहुलक है?
(1) 3 (2) 4
(3) 5 (4) 8 (1)

02. निम्न का बहुलक ज्ञात करो।

x_i	5	7	9	11	13
f_i	4	8	6	2	5

(1) 5 (2) 7
(3) 9 (4) 11 (2)
(Hint:यहाँ चर xi = 7 की बारम्बारता सबसे अधिक है।)

03. किसी श्रेणी का बहुलक मूल्य होता है?
(1) मध्यवर्ती मूल्य
(2) सीमान्त मूल्य
(3) न्यूनतम बारम्बारता का मूल्य
(4) सर्वाधिक बारम्बारता वाला मूल्य (4)

04. आकड़े 8, 6, 12, 4, 13, 20, 7, 2, 3, 3, 10 का माध्यक/माध्यिका है -
(1) 3 (2) 7
(3) 8 (4) 20 (2)
[Hint:- आकड़ों को आरोही क्रम में लिखकर $\frac{N+1}{2}$ वाँ पद]

05. यदि निम्नलिखित आकड़ों की बारम्बारताओं का योग 60 है, तो x का मान है?

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
बारम्बारता	5	x	20	15	7	5

(1) 7 (2) 8
(3) 15 (4) 20 (2)

हल- 5+x+20+15+7+5=60
x+52 = 60
x = 60-52
x = 8

06. यदि 3, 7, 9, x, 5 का समान्तर माध्य 6 हो तो x का मान होगा
(1) 5 (2) 4.8
(3) 6 (4) 24 (3)

हल- $\bar{x} = \frac{\sum xi}{N}$

$$6 = \frac{3+7+9+x+5}{5}$$
$$6 \times 5 = 24 + x$$
$$30 = 24 + x$$
$$x = 30 - 24$$
$$x = 6$$

07. प्रथम 10 सम प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए-

$$\left\{ x = \frac{\sum xi}{N} = \frac{2+4+6+8+10+12+14+16+18+20}{10} \right\}$$

$$\bar{x} = \frac{110}{10} = 11$$

(1) 10 (2) 11
(3) 12 (4) 20 (2)

08. संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग ज्ञात करने में किया जाता है-
(1) माध्य (2) बहुलक
(3) माध्यक (4) कोई भी नहीं (3)

09. एक बंटन का माध्य तथा माध्यक क्रमशः 14 तथा 15 है। तो बहुलक का मान होगा-
(1) 13 (2) 16
(3) 17 (4) 18 (3)

हल- बहुलक + 2 माध्य = 3 माध्यक (माध्य, माध्यक व बहुलक में संबंध)
बहुलक + 2 × 14 = 3 × 15
बहुलक + 28 = 45
बहुलक = 45 – 28
बहुलक = 17

10. माध्य $(\bar{x})$, माध्यक (m) और बहुलक (z) में संबंध है-
(1) $3m = z - 2\bar{x}$ (2) $3m - 2\bar{x} = z$
(3) $3m - 2z + \bar{x}$ (4) $3m = 2z - \bar{x}$ (2)

11. वर्ग अन्तराल 24 – 30 का वर्ग चिन्ह क्या होगा-
(1) 16 (2) 24

(3) 27 (4) 30 (3)

हल- वर्ग चिन्ह $=\frac{24+30}{2}=\frac{54}{2}=27$

12. यदि निम्न आकड़ों का बहुलक 7 हो तो K का मान ज्ञात कीजिए-
2, 4, 6, 7, 5, 6, 10, 6, 7, 2k+1, 9, 7
(1) 3 (2) 6
(3) 7 (4) 10 (1)

हल- 2k + 1 = 7
2k = 7 - 1
2k = 6
$k=\frac{6}{2}$
k = 3

13. निम्न प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि आकड़ों का माध्यक 63 हो तो K का मान ज्ञात कीजिए-
29, 32, 48, 50, k, k+2, 72, 78, 84, 95
(1) 60 (2) 61
(3) 62 (4) 72 (3)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यदि 3, 7, 9, x, 5 का समान्तर माध्य 6 हो तो x का मान..... होगा।

हल: $\because \bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$

$6=\frac{3+7+9+x+5}{5}$

$\Rightarrow 6\times 5=24+x$

$\Rightarrow 30=24+x$

$\Rightarrow x=30-24=6$

प्रश्न 2. वर्ग अन्तराल (10-35) का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।

हल: वर्ग चिन्ह $(x)=\frac{35+10}{2}=\frac{45}{2}=22.5$

प्रश्न 3. प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का औसत .... है।

हल: $\bar{x}=\frac{0+1+2+3+4}{5}=\frac{10}{5}=2$

प्रश्न 4. बहुलक =3×(......) - 2 माध्य

हल: माध्यक

प्रश्न 5. केन्द्रिय प्रवृति का अधिकतर प्रयोग होने वाला माप है-

हल- माध्य $\left(\bar{x}\right)$

प्रश्न 6. आकड़ों 8, 6, 12, 4, 25, 3 का परिसर ज्ञात कीजिए-
हल- परिसर = अधिकतम मान - न्यूनतम मान
= 25-3 = 22

प्रश्न 7. किसी श्रेणी का सर्वाधिक बारम्बारता का मूल्य कहलाता है-
हल- बहुलक

प्रश्न 8. संचय बारम्बरता सारणी (C.F.) का उपयोग केन्द्रिय प्रवृत्ति के किस मान को ज्ञात करने में किया जाता है-
हल- माध्यक

प्रश्न 9. बटन 6, 11, 21, 23, 14, 5 का माध्य ज्ञात कीजिए

हल- माध्य $\left(\bar{x}\right)=\frac{\sum xi}{n}$

$=\frac{6+11+21+23+14+5}{6}$

$=\frac{80}{6}=13.33$

प्रश्न 10. बंटन 3, 5, 7, 4, 2, 1, 4, 3, 4 का बहुलक है-
हल- दिये गये बटन में 4 सर्वाधिक 3 बार आया है।
अत: बहुलक = 4

प्रश्न 11. बंटन 7, 4, 6, 3, 8, 5, 19 की माध्यिका ज्ञात कीजिए-
हल- सर्वप्रथम आरोही क्रम में लिखने पर
3, 4, 5, 6, 7, 8, 19
यहाँ पदों की संख्या n = 7 (विषम) है।

माध्यक $M=\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद

$M=\left(\frac{7+1}{2}\right)$ वाँ पद = 4 वाँ पद

M = 6

प्रश्न 12. बटन 1, 3, 2, 5, 9, 11 का माध्यक ज्ञात कीजिए-
हल- सर्वप्रथम आरोही क्रम में लिखने पर
1, 2, 3,5, 9, 11 (पदों की संख्या n = 6 सम है।)

माध्यक $=\frac{3\text{वाँ पद } 4 \text{ वाँ पद}}{2}$

$M=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$

प्रश्न 13. पदों 5, 6, 7, 9, k और 20 का समान्तर माध्य 11 हैं। तो k का मान ज्ञात कीजिए-

हल- समान्तर माध्य $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$

$$11 = \frac{5+6+7+9+k+20}{6}$$

$$11 \times 6 = 47 + k$$

$$k = 66 - 47$$

$$k = 19$$

प्रश्न 14.एक गाँव के 32 परिवारों में उसके सदस्यों की संख्या निम्न सारणी के अनुसार हैं। बहुलक ज्ञात कीजिए-

सदस्य संख्या	2	3	4	5	6	7	8
परिवार f	1	2	4	7	10	3	5

हल: यहाँ 6 की बारम्बारता सबसे अधिक है।

अत: बहुलक = 6

◈ लघुरात्मक प्रश्न-

प्रश्न 1.

x	1	3	5	7
f	3	2	1	2

बंटन का माध्य और माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल: माध्य

x	f	fx
1	3	3
3	2	6
5	1	5
7	2	14
	$\sum F = 8$	$\sum fx = 28$

$\because \bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F} = \frac{28}{8} = 3.5$

माध्यिका

x	f	cf
1	3	3
3	2	5
5	1	6
7	2	8
	$\sum f = 8$	

माध्यिका$(M) = \frac{8}{2} = 4$ से ठीक बड़ी $C.F=5$ के संगत चर 3 है इसलिए माध्यिका $(M)=3$

प्रश्न 2.

x	5	10	15	20
f	3	7	2	4

बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता '7' है के संगत चर का मान 10 है। इसलिए इस बंटन का बहुलक 10 है।

प्रश्न 3. निम्न बंटन में P का मान लिखिए-

हल:

x	10	15	20	25	30
f	2	5	P	3	2
$C.F.$	2	7	10	13	15

$$7 + P = 10$$

$$\Rightarrow P = 10 - 7 = 3$$

◈ दीर्घ उत्तरात्मक/निबंधात्मक प्रश्नः-

प्रश्न 1. वायु में सल्फर - डाई -ऑक्साइड (SO_2) की सान्द्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गए, जिन्हें प्रस्तुत किया गया है: माध्य सान्द्रता ज्ञात कीजिए।

So_2 की सान्द्रता	0.00 – 0.04	0.04 – 0.08	0.08 – 0.12	0.12 – 0.16	0.16 – 0.20	0.20 – 0.24
F	4	9	9	2	4	2

हल:

So_2 सान्द्रता	F	X	Fx
0.00 – 0.04	4	0.02	0.08
0.04 – 0.08	9	0.06	0.54
0.08 – 0.12	9	0.10	0.90
0.12 – 0.16	2	0.14	0.28
0.16 – 0.20	4	0.18	0.72
0.20 – 0.24	2	0.22	0.44
योग	$\sum F = 30$		$\sum fx = 2.96$

$$\bar{x} = \frac{\sum Fx}{\sum F} = \frac{2.96}{30} = 0.0986\, ppm$$

प्रश्न 2. निचे दिये गए बंटन का कल्पित विधि से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	10-25	25-40	40-55	55-70
विद्यार्थी संख्या	2	3	7	6

वर्ग अंतराल	70-85	85-100
विद्यार्थी संख्या	6	6

हल:

वर्ग अंतराल	F	x	$d=x-a$	Fd
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
योग	$\sum F=30$			$\sum Fd=435$

माना कल्पित माध्य $(a) = 47.5$

माध्य $(\bar{x}) = a + \frac{\sum Fd}{\sum F}$

$$= 47.5 + \frac{435}{30}$$
$$= 47.5 + 14.5$$
$$= 62$$

प्रश्न 3. यदि निम्न बंटन का माध्य 7.5 हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

x	3	5	7	9	11	13
F	6	8	15	P	8	4

हल:

X	F	Fx
3	6	18
5	8	40
7	15	105
9	P	$9P$
11	8	88
13	4	52
	$\sum F = 41+P$	$\sum Fx = 303+9P$

$$\because \bar{x} = \frac{\sum Fx}{\sum F}$$
$$7.5 = \frac{303+9P}{41+P}$$
$$7.5(41+P) = 303+9P$$
$$307.5+7.5P = 303+9P$$
$$307.5-303 = 9P-7.5P$$
$$4.5 = 1.5P$$
$$\Rightarrow P = \frac{4.5}{1.5} = 3$$

प्रश्न 4. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है माध्यक आयु परिकलित कीजिए।

आयु (वर्षा में)	पॉलिसी धारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

हल:

आयु (वर्षों में)	C.F	F
20 से कम	2	2
20-25	6	6-2=4
25-30	24	24-6=18
30-35	45	45-24=21
35-40	78	33
40-45	89	11
45-50	92	3
50-55	98	6
55-60	100	2

यहाँ $N=\Sigma F=100$ तो

$\frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$ से ठीक बड़ी C.F (78) के संगत माध्यक वर्ग 35 से 40 है।

इसलिए $l=35, F=33, C.F=45, h=5$

माध्यक $\because M=l+\left(\frac{\frac{N}{2}-C.F}{F}\right)\times h$

$\because M=35+\left(\frac{50-45}{33}\right)\times 5$

$=35+\frac{5\times 5}{33}$

$=35+\frac{25}{33}=35+0.76$

$=35.76$ वर्ष

प्रश्न 5. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

हल: यहाँ अधिकतम बारम्बारता 8 है तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग 3-5 है। अत: बहुलक वर्ग 3 - 5 है।

$l=3, h=2, F_1=8, F_o=7, F_2=2$

बहुलक $(z)=l+\left[\frac{F_1-Fo}{2F_1-F_o-F_2}\right]\times h$

$z=3+\left[\frac{8-7}{2\times 8-7-2}\right]\times 2$

$z=3+\frac{2}{7}=3.286$

अत: उपरोक्त ...... आँकड़ों का बहुलक 3.286 है।

प्रश्न 6. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 525 है। यदि बारम्बारताओं का योग 100 है तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
बारम्बारता	2	5	x	12	17
वर्ग अंतराल	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
बारम्बारता	20	y	9	7	4

हल:

वर्ग अंतराल	बारम्बारता(F)	संचयी बारम्बारता(C.F)
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y=\Sigma F$

दिया है कि $\Sigma F=N=100$ तथा $\Sigma F=76+x+y$ से

अत: $76+x+y=100$

$\Rightarrow x+y=100-76$

$\Rightarrow x+y=24$ ....(1)

माध्यक (M)= 525, जो वर्ग 500-600 में स्थित है।

अतः $l=500, F=20, C.F=36+x, h=100, \frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$

माध्यक $\because M=l+\left(\frac{\frac{N}{2}-C.F_{\text{पूर्व}}}{F_{\text{संगत}}}\right)\times h$

$525=500+\left(\frac{50-(36+x)}{20}\right)\times 100$

$\Rightarrow 525=500+\left(\frac{50-36-x}{20}\right)\times 100$

$\Rightarrow 525-500=\frac{14-x}{20}\times 100$

$\Rightarrow 25=(14-x)\times 5$

$\Rightarrow 25=70-5x$

$\Rightarrow 5x=70-25=45$

$\Rightarrow x=\frac{45}{5}=9$

x का मान समी.(1) में रखने पर , 9+y=24

y=24-9=15

◈ अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न-

प्रश्न 1. निम्न बारम्बारता बंटन का C.F ज्ञात कीजिए।

x	1	2	3	4	5	6
F	2	4	5	4	2	2

प्रश्न 2. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (%) में दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए:

साक्षर दर (% में)	44-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

प्रश्न 3. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
F	10	35	52	61	38	29

14 प्रायिकता

बहुविकल्प प्रश्न - 1, अंक (1), रिक्त स्थान-1, अंक (1) लघुत्तरात्मक प्रश्न - 1, अंक (2) कुल अंक = 4

❖ प्रायिकता: किसी घटना के घटित होने की संभावना का संख्यात्मक रूप प्रायिकता होता है।

सैद्धान्तिक प्रायिकता का सूत्र

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$$ (माना प्रयोग के परिणाम समप्रायिक है।)

❖ यादृच्छया उछाल:- जब किसी सिक्के को बिना किसी पक्षपात या रूकावट के स्वतंत्रतापूर्वक गिरने दिया जाता है।

❖ समप्रायिक:- जब किसी यादृच्छया प्रयोग में किसी घटना के सभी परिणामों के प्राप्त होने की सम्भावना/समान होती है। ये परिणाम समप्रायिक कहलाते है।

❖ प्रारम्भिक घटना:- किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो। प्रारंभिक घटना कहलाती है।

❖ असम्भव घटना:- ऐसी घटना जिसका घटित होना असम्भव हो।

❖ निश्चित घटना:- ऐसी घटना जिसका घटित होना निश्चित है।

❖ पूरक घटनाएँ:- यदि 'E' किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता है तथा '$\bar{E}$' नहीं घटित होने की प्रायिकता है तब E और $\bar{E}$ पूरक घटनाएँ कहलाती है । अत: $P(E)+P(\bar{E})=1$

$\Rightarrow P(E)=1-P(\bar{E})$

❖ किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं का योग 1 होता है।

❖ एक निश्चित या निर्धारित घटना की प्रायिकता 1 होती है।

❖ एक असम्भव घटना की प्रायिकता 0 होती हे।

❖ सभी प्रायिकताओं का मान शून्य या शून्य से अधिक और 1 या 1 से कम होता है।

अर्थात् $O \le P(E) \le 1$

(A) सिक्के से सम्बन्धित :-

चित्त (H) और पट (T) कुल परिणाम - 2^n

(i) जब एक सिक्का हो -

कुल परिणाम = 2^1 =2 [H,T]

(ii) जब दो सिक्के हो या एक ही सिक्के को दो बार उछाले-

·éÜ Âçúþæ = 2^2 = 4 [HH, TH, HT, TT]

(iii) जब तीन सिक्के हो या एक ही सिक्के को तीन बार उछाले-

कूल परिणाम = 2^3 = 8 [HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH]

(B) पासे से सम्बन्धित:- पासे के फलकों पर अंकित अंक 1,2, 3, 4, 5, 6 कुल परिणाम = 6^n

(i) जब एक पासा हो -

कुल परिणाम= 6^1 = 6 [1,2,3,4,5,6]

(ii) जब दो पासें हो या एक ही पासें को दो बार फेंकें -

कुल परिणाम= 6^2 =36 [(1,1)(1,2).....(1,6) (6,1) (6,2) ......(6,6)]

(C) ताश के पत्तों से सम्बन्धित :- कुल पत्ते - 52

पान (hearls)	ईंट(diamonds)	हुकुम(Spades)	चिड़ी (Clubs)
13	13	13	13

लाल रंग(26) काला रंग(26)

प्रत्येक प्रकार में - A (इक्का)2,3,4,5,6,7,8,9,10, गुलाम, बेगम, बादशाह

❖ प्रत्येक प्रकार में तस्वीर/फेस/मुख/फोटो वाले पत्ते '3' होते है।

❖ कुल फेस कार्ड होते है-12

❖ बिना तस्वीर वाले पत्ते - 40

❖ कुल रानी वाले पत्ते - 4

❖ कुल राजा वाले पत्ते -4

❖ कुल गुलाम के पत्ते-4

❖ कुल इक्कों की संख्या - 4

(D) वार (day) से सम्बन्धित

अलीप वर्ष/सामान्य वर्ष में दिन -365

लीप वर्ष /अधि वर्ष में दिन- 366

(i) अलीप वर्ष हो 52 रविवार आने की प्रायिकता

365 दिन में 52 सप्ताह, 1 दिन शेष रहता है 52 सप्ताह में 52 रविवार आ चुके हैं अर्थात् 1 दिन में अब रविवार नहीं आ सकता। अन्य वार (सोम, मंगल, बुध, गुरू, शुक्र, शनि)= 6

में से आ सकते है। अर्थात् अनुकूल परिणाम =6

प्रायिकता $=\frac{6}{7}$

❖ लीप वर्ष में 52/53 रविवार आने की प्रायिकता भी ज्ञात की जा सकती है।

(E) गेंद/कंचे/पेन से सम्बन्धित:- सभी Items का योग करना है। उसके बाद अनुकूल परिणाम ज्ञात करके प्रायिकता ज्ञात कर सकते है।

◈ **बहुविकल्प प्रश्न:-**

प्र. 1. जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। तो एक चित प्राप्त करने के प्रायिकता होता है?

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{1}{2}$

(स) 1 (द) $\frac{1}{3}$ (ब)

हल: $\frac{1}{2}$

प्र. 2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। कम से कम एक चित्त आने की प्रायिकता है?

(अ) $\frac{3}{4}$ (ब) $\frac{1}{4}$

(स) $\frac{1}{3}$ (द) $\frac{1}{2}$ (अ)

हल: एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम=4

$[HH, HT, TH, TT]$

कम से कम एक चित्त आने के अनुकूल परिणाम $=3[HH, HT, TH]$

अत: प्रायिकता $=\frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}=\frac{3}{4}$

प्र. 3. निश्चित घटना की प्रायिकता होती है-

(अ) 0 (ब) 1

(स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{3}{4}$ (ब)

प्र. 4. निम्न में से प्रायिकता नहीं हो सकती है?

(अ) $\frac{2}{3}$ (ब) -1

(स) 50% (द) 0.7 (ब)

प्र. 5. एक बच्चे का जन्म होता है। वह लड़का होने की प्रायिकता क्या होगी?

(अ) $\frac{1}{3}$ (ब) $\frac{2}{1}$

(स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{2}{3}$ (स)

प्र. 6. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। अभाज्य संख्या को प्राप्त करने की प्रायिकता है-

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{2}{3}$

(स) 0 (द) 1 (अ)

हल: एक पासे को एक बार फेंकने पर कुल परिणाम=6

(1,2,3,4,5,6,)

अभाज्य संख्या प्राप्त होने के अनुकूल परिणाम =3(2,3,5,)

अत: प्रायिकता $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

प्र. 7. यदि किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता 0.7 है तो घटना के घटित नहीं होने की प्रायिकता है-?

(अ) 0.03 (ब) 0.3

(स) 0.003 (द) 3.0 (ब)

रिक्त स्थान

1. घटना 'E' की प्रायिकता + घटना 'E' नहीं की प्रायिकता =............ है।

हल: 1

2. उस घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती .... है, ऐसी घटना .... कहलाती है।

हल: 0, असम्भव घटना

3. उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित .... होती है। ऐसी घटना .... कहलाती है।

हल: 1, संभव घटना

4. कियी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग .... होता है।

हल: 1

5. किसी घटना की प्रायिकता .... से बड़ी या उसके बराबर होती है। तथा .... से छोटी या उसके बराबर होती है।

हल: 0, 1

6. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। तो सम संख्या आने की प्रायिकता .... होगी।

हल: $\frac{1}{2}$

◈ **लघुरात्मक प्रश्न-**

प्र. 1. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलते हैं। संगीता द्वारा मैंच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की प्रायिकता क्या है?

हल: संगीता के जीतने की प्रायिकता = P(S)=0.62 (दिया है)

रेशमा के जीतने की प्रायिकता = P (R)=?

P (S) + P(R) = 1 [Rऔर S पूरक घटनाएँ है]

P (R) = 1- P(S)= 1- 0.62=0.38

प्र. 2. एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है सिक्के पर तीन चित्त या तीन पट प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: सिक्के की तीन उछाल पर प्राप्त सभी परिणाम =8[HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT]

सिक्के पर तीन चित्त या तीन पट आने के अनुकूल परिणाम = 2 [HHH,TTT]

प्रायिकता $=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

प्र. 3. एक पासे को दो बार फेंका जाता है (i) '5' कम से कम एक बार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए (ii) 5 किसी बार नहीं आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए-

हल: पासे को दो बार फेंकने पर कुल संभावित परिणाम=36

(i) 5 कम से कम एक बार आने के अनुकूल परिणाम = 11 [(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)(1,5)(2,5)(3,5)(4,5)(6,5)]

प्रायिकता$=\frac{11}{36}$

(ii) 5 किसी बार नहीं आने की प्रायिकता $=\frac{25}{36}$

प्र. 4. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता निकला गया पता ।

(i) एक इक्का होगा
(ii) लाल रंग की बेगम
(iii) तस्वीर वाले पत्तें नहीं
(iv) दहला

हल: कुल पत्तों की संख्या =52

(i) एक इक्का होने के अनुकूल परिणाम=4

एक इक्का होने की प्रायिकता$=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

(ii) लाल रंग की बेगम होने के अनुकूल परिणाम=2

लाल रंग की बेगम की प्रायिकता $=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$

(iii) तस्वीर वाले पत्ते नहीं होने की अनु.परिणाम=52-12=40

तस्वीर वाले पत्ते नहीं होने की प्रायिकता$=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$

(iv) दहला होने के अनुकूल परिणाम=4

दहला होने की प्रायिकता$=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

प्र. 5. एक थैलें में 5 सफेद व 2 लाल गेंदें है इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंद होगी-

(i) सफेद (ii) लाल

हल: कुल गेंद =5+2=7

प्रायिकता$=\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}}$

(i) सफेद गेंद होने की प्रायिकता$=\frac{5}{7}$

(ii) लाल गेंद होने की प्रायिकता$=\frac{2}{7}$

प्र. 6. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: खराब पेनों की संख्या=12

अच्छे पेनों की संख्या= 132

पेनों की कुल संख्या=12 +132=144

प्रायिकता$=\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}}$

अच्छा पेन प्राप्त होने की प्रायिकता$==\frac{132}{144}=\frac{11}{12}$

प्र. 7. **यदि** $P(A)=\frac{13}{20}$ है तो "A नहीं" प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः $\because P(A)+P(\bar{A})=1$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{13}{20}=\frac{20-13}{20}=\frac{7}{20}$$

◈ अभ्यास प्रश्नः-

प्र. 1. यदि P(E)=0.992 है तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?

प्र. 2. सविता और हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों (i) के जन्म दिन भिन्न-भिन्न हों?

(ii) का जन्म दिन एक ही हो ? (लीप वर्ष को छोड़ते हुए)

प्र. 3. एक पिग्मी बैंक में 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, रू 1 के पचास सिक्के है, रू 2 के बीस सिक्के और रू 5 के दस सिक्के है। यदि पिग्मी बैंक को हिलाकर उल्टा करने पर कोई एक सिक्का गिरने के परिणाम समप्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का (i) 50 पैसे का होगा? (ii) रू 5 का नहीं होगा।

प्र. 4. अच्छी प्रकार से फंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक इक्का नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 5. अलीप वर्ष में 53 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 6. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते है, अधिक से अधिक दो चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र. 7. एक बक्से में 7 नीले और 3 सफेद कंचे है। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा "सफेद" है?

प्र 8. एक पेटी में 90 डिस्क है। जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित है। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी (i) दो अंकों की एक संख्या

(ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या

(iii) 5 से विभाज्य एक संख्या

माध्यमिक परीक्षा 2026

मॉडल पेपर

समय : 03.15 घंटे विषय :गणित पूर्णांक : 80

खंड – A

प्रश्न 1. बहु विकल्पीय प्रश्न [18×1 = 18]

(i)निम्नलिखित में से कौन-सा परिमेय संख्या नहीं है?

(a) 2 (b) 2.232425…

(c) 2.232323…. (d) 22/7 [b]

(ii) दो सह-अभाज्य (co-prime) संख्याओं का HCF होताहै –

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 4 [b]

(iii) यदि किसी बहुपद के शून्यक √2 और –√2 हों, तो बहुपद होगा –

(a) $x^2 - \sqrt{2}$ (b) $x^2 + \sqrt{2}$

(c) $x^2 - 2$ (d) $x^2 + 2$ [c]

(iv) रैखिक समीकरणों के युग्म

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

का अद्वितीय हल होगा यदि –

(a) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (d) None of these [a]

(v) निम्न में से कौन-सी समान्तर श्रेणी (AP) है?

(a) 2, 4, 8, 16, …

(b) 1, 3, 9, 27, …

(c) a, 2a, 3a, 4a, …

(d) a, a^2, a^3, a^4, … [c]

(vi) AP : 10, 7, 4, … का 30वाँ पदहै –

(a) 97 (b) 77

(c) –77 (d) –87 [c]

(vii) सम संख्यक भुजाओं वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि –

(a) उनके संगत कोण बराबर हों

(b) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों

(c) (a) और (b) दोनों

(d) इनमें से कोई नहीं [c]

(viii) बिंदु (–3, 0) स्थितहै –

(a) द्वितीय चतुर्थांश में

(b) तृतीय चतुर्थांश में

(c) Y-अक्ष पर

(d) X-अक्ष पर [d]

(ix) A के किस मान पर tan A परिभाषित नहीं है?

(a) 90° (b) 45°

(c) 60° (d) 0° [a]

(x) प्रेक्षक की आँख से, देखी जा रही वस्तु तक खींची गई रेखा को कहते हैं –

(a) उन्नयन कोण (b) अवनमन कोण

(c) क्षैतिज रेखा (d) दृष्टि रेखा [d]

(xi) वृत्त के किसी बिंदु पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या होती है –

(a) अनंत (b) 1

(c) 0 (d) 2 [b]

(xii) दिए गए चित्र में TP और TQ वृत्त की दोस्पर्श रेखाएँ हैं तथा∠POQ = 110°, तो∠PTQ होगा –

(a) 60°

(b) 70°

(c) 80°

(d) 90° [b]

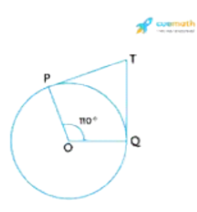


Fig. 10.11

(xiii) वृत्त की जीवा द्वारा बने प्रत्येक भाग को कहते हैं –

(a) त्रिज्यखण्ड (b) चाप

(c) वृत्तखण्ड (d) चतुर्थांश [c]

(xiv) आइसक्रीम कोन का आकार किस का संयोजन है –

(a) गोला + बेलन

(b) गोला + शंकु

(c) अर्द्धगोला + बेलन

(d) अर्द्धगोला + शंकु [d]

(xv) 7 सेमी भुजा वाले घन पर एक अर्द्ध गोला रखा गया है।अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास होगा –

(a) 7 सेमी (b) 14 सेमी

(c) 21 सेमी (d) 28 सेमी [a]

(xvi) केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों के बीच अनुभवजन्य संबंध है –

(a) 3 माध्यिका = बहुलक + 2 माध्य

(b) 2 माध्यिका = बहुलक + 2 माध्य

(c) 3 माध्यिका = बहुलक + माध्य

(d) 3 माध्यिका = बहुलक – 2 माध्य [a]

(xvii) संचयी बारंबारता सारणी का निर्माण उपयोगी है –

(a) माध्य ज्ञात करने में

(b) माध्यिका ज्ञात करने में

(c) बहुलक ज्ञात करने में

(d) इनमें से कोई नहीं [b]

(xviii) निम्नलिखित में से कौन-सा कथन गलत है?

(a) किसी प्रयोग की सभी प्राथमिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 होता है

(b) यदि E और E’ पूरक घटनाएँ हैं, तो P(E) + P(E’) = 1

(c) किसी घटना की प्रायिकता 1 से अधिक या बराबर नहीं हो सकती

(d) सभी प्रयोगों के परिणाम सम प्रायिक नहीं होते [c]

प्रश्न 2. रिक्त स्थान भरिए [6×1 = 6]

(i) 2, __ ,26 एक समान्तर श्रेणी है। [14]

(ii) सभी ____ त्रिभुज समरूप होते हैं। [समबाहु]

(iii) Sin2A = 2SinA सत्य है जब A = ____ । [0^0]

(iv) जिस घटना के घटित होने की कोई संभावना नहीं होती, उसकी प्रायिकता ____ होती है। ऐसी घटना को असंभव घटना कहते हैं [शुन्य]

(v) वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु से खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या ____ होती है। [2]

(vi) यदि किसी द्विघात समीकरण का विविक्त कर (Discriminant) शून्य हो, तो उस के मूल ____ तथा वास्तविक होतेहैं। [समान]

प्रश्न 3. अतिलघुउत्तरीयप्रश्न [12×1 = 12]

(i) AP : 3, 8, 13, 18, … का कौन-सा पद 78 है?

उत्तर :–16वां पद

(ii) यदि HCF (306, 657) = 9 है, तो LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–22338

(iii) अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 12, 15 और 21 का HCF तथा LCM ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–HCF = 3, LCM = 420

(iv) ऐसा द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग –3 और गुणनफल 2 हो।

उत्तर :–$x^2 + 3x + 2$

(v) अनुपात a_1/a_2, b_1/b_2 और c_1/c_2 की तुलना कर यह बताइए कि निम्न रैखिक समीकरण युग्म की रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समान्तर हैं या संपाती हैं –

$5x - 4y + 8 = 0;$

$7x + 6y - 9 = 0$

उत्तर :–चूंकि $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$,अतः दोनों रेखाएं परस्पर प्रतिच्छेद करेंगी ।

(vi) बिंदुओं (a, b) तथा (–a, –b) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–$2\sqrt{2}a$ इकाई

(vii)यदि किसी खंभे की छाया उसकी ऊँचाई के बराबर हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–45^0

(viii) 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के P बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा PQ, केंद्र O से होकर जाने वाली रेखा को Q पर मिलती है।यदि OQ = 12 सेमी हो, तो PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–$\sqrt{119}$

(ix) 4 सेमी त्रिज्या और 30° कोण वाले वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर :–4.19 cm (Aprox)

(x) त्रिज्या r तथा कोण θ (डिग्री में) वाले त्रिज्यखण्ड की चाप की लंबाई का सूत्र लिखिए।

उत्तर :–$\frac{\pi r\theta}{180}$

(xi) यदि n प्रेक्षणों का योग Σx है,तो उनका अंक गणितीय माध्य क्या होगा?

उत्तर :–$\frac{\Sigma x}{n}$

(xii) वह प्रेक्षण जिसकी आवृत्ति (बारंबारता)अधिकतम हो,क्या कहलाता है?

उत्तर :–बहुलक

खंड– B

लघुउत्तरीय प्रश्न [10×2 = 20]

4. उन संख्याओं के पहले 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिनका n वाँ पद $a_n = 3 + 2n$ है।

5. एक समलंब चतुर्भुज ABCD में AB || DC है तथा इसके विकर्ण O बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

6. द्विघात बहुपद $6x^2 - 7x - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित कीजिए।

7. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए–

$x + y = 5$

$2x - 3y = 4$

8. एक कार्टन में 100 कमीजें हैं,जिनमें 88 अच्छी हैं, 8 में छोटे दोष हैं तथा 4 में बड़े दोष हैं। जिमी केवल अच्छी कमीजें स्वीकार करता है तथा सुजाता केवल बड़ी खराबी वाली कमीजें अस्वीकार करती है। यादृच्छया एक कमीज निकाली जाती है।प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि–

(i)वह जिमी को स्वीकार्य हो

(ii)वह सुजाता को स्वीकार्य हो

9. यदि A (6,1), B(8,2), C(9,4) और D(p,3) एक समान्तर चतुर्भुज के क्रमागत शीर्ष हों,तो p का मान ज्ञात कीजिए।

10. समकोण त्रिभुज ABCमें, $\angle$Bपर समकोण है।यदि tan A = 1हो,तो सिद्ध कीजिए कि

2SinA CosA = 1

11. बाह्य बिंदु T से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ हैं।सिद्ध कीजिए कि

$\angle PTQ = 2\angle OPQ$

12. 21सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में एक चाप केंद्र पर 60° कोण बनाता है।संगत जीवा द्वारा बने वृत्त खंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. एक गेंद बाज द्वारा 10 क्रिकेट मैचों में लिए गए विकेट हैं–

2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3

आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

खंड– C

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न [4×3 = 12]

14. यदिQ(0,1), P(5, –3) और R(x,6) से समान दूरी पर स्थित है,तो x का मान ज्ञात कीजिए।साथ ही QRऔर PR की दूरी ज्ञात कीजिए।

अथवा

y.अक्ष उस रेखा खंड को किस अनुपात में विभाजित करता है जो बिंदुओं (5, –6) और (–1, –4)को जोड़ता है? प्रतिच्छेद बिंदु भी ज्ञात कीजिए।

15. सिद्ध कीजिए–

$$secA(1 - sinA)(secA + tanA) = 1$$

अथवा

$$\frac{tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta$$

16. 20 परिवारों पर किए गए सर्वेक्षण से निम्न बारंबारता सारणी प्राप्त हुई–

परिवारविवरण	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवार संख्या	7	8	2	2	1

इस आँकड़े का बहुलक ज्ञात कीजिए।

अथवा

कक्षा 10 की 51 छात्राओं की ऊँचाई (सेमीमें) निम्नानुसार है–

ऊंचाई (सेमी)	140 से कम	145 से कम	150 से कम	155 से कम	160 से कम	165 से कम
लड़कियों की संख्या	4	11	29	40	46	51

माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

17. 13 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के एक बिंदु पर एक खंभा इस प्रकार गाड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनों अंत बिंदुओं परबने फाटकों Aऔर B से खंभे की दूरियों का अंतर 7 मीटर हो।क्या ऐसा करना संभव है? यदि है, तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियों पर खंभा गाड़ना है?

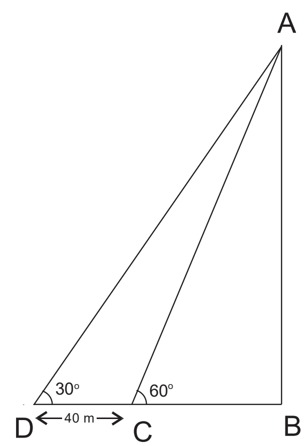
अथवा

किसी समकोण त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार से 7 सेमी कम है। यदि कर्ण 13 सेमी है, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

खंड– D

निबंधात्मक प्रश्न [3×4 = 12]

18. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थितिमें 40 m अधिक लंबी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश (altitude) 60^0 से घटकर 30^0 हो जाता है अर्थात् छाया के एक सिरे से मीनार के शिखर का उन्नयनकोण 60° है और DB छाया की लंबाई है जबकि उन्नयन कोण 30° है।मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



अथवा

समुद्र तल से 75 मीटरऊँचे प्रकाश स्तंभ के शीर्ष से दो जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः30 और45 हैं। यदि एक जहाज दूसरे के ठीक पीछे है,तो दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

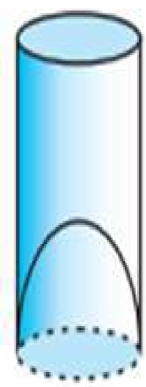
19. 7 सेमी भुजा वाले घन पर एक अर्द्ध गोला रखा गया है।

(i)अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास क्या होगा?

(ii)इस ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक जूस (juice) बेचने वाला अपने ग्राहकों को संलंग्न आकृति में दर्शाए गिलासों से जूस देता था।बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार (तली) में एक उभरा हुआ अर्धगोलाथा, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 cmथी, तो गिलास की आभासी (apparent)धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए।(π = 3.14 लीजिए।)



20 यदि नीचे दिए गए वितरण की माध्यिका 28.5 है,तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

वर्गअंतराल	आवृत्ति
0-10	5
10-20	X
20-30	20
30-40	15
40-50	Y
50-60	5
Total	60

अथवा

निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है :

दैनिकव्यय (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए।